FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Méthodes de discrétisation en fluides

Dr. Marc A. Habisreutinger
Enoncé de l'examen écrit du lundi 30 juin 2014, de 08:15 à 11:15, salle CO3

Sections

Génie mécanique	2013-2014	Bachelor semestre 6	19
Génie mécanique	2013-2014	Master semestre 2	2
Passerelle HES-GM	2013-2014	Semestre printemps	2

Matériel

- Le seul document autorisé est un résumé personnel, manuscrit et non-photocopié de 12 pages (6 feuilles recto-verso).
- Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable, ordinateur, *etc.*) ne peut être utilisé pendant l'examen.

Informations

- L'examen compte six problèmes dont la pondération est indiquée entre parenthèses dans le titre.
- La clarté des explications ainsi que la qualité de la présentation seront prises en compte dans l'évaluation.

Important

- Les problèmes doivent être résolus en utilisant les feuilles de réponse fournies. N'utilisez pas ces feuilles comme brouillon!
- Chaque problème doit être résolu sur une ou plusieurs feuilles de réponse séparées.
- Sur chaque feuille, indiquez votre nom et prénom ainsi que le numéro du problème traité.

1 Différences finies (15%)

Comme illustré à la figure 1, on considère trois noeuds qui appartiennent à un maillage non-uniforme et monodimensionel. Ces noeuds sont respectivement placés aux coordonnées x_{i-1}, x_i et x_{i+1}. La longueur

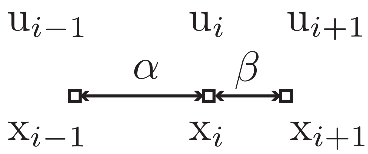

Figure 1: Maillage monodimensionel et non-uniforme.

des intervalles est donnée par

$$\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_{i-1} = \alpha > 0, \tag{1}$$
$$\mathrm{x}_{i+1} - \mathrm{x}_i = \beta > 0. \tag{2}$$

1. Etablir un schéma aux différences finies permettant d'approximer la dérivée première selon x du champ $u_h(x)$ au noeud i en utilisant ses valeurs nodales u_{i-1}, u_i et u_{i+1}.

2. Déterminer l'ordre de cette approximation en fonction de α, β et $\Delta = \beta - \alpha$.

3. Determiner l'ordre de cette approximation si les noeuds sont équidistants, en posant $\alpha = \beta \equiv h$.

2 Equations aux dérivées partielles (15%)

On considère le système d'équations aux dérivées partielles donné par

$$\begin{aligned} +\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ +\frac{\partial v}{\partial t} + 3\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

et on demande d'en déterminer

1. le caractère mathématique,
2. les courbes caractéristiques,
3. les invariants de Riemann.

3 Laboratoires (25%)

```
%% 1.   PARAMETERS

%  1.1  Mesh parameters
np = 101 ; L = 2 ;

%  1.2  Equation coefficients
nu = +1e-01 ;

%  1.3  Time-scheme parameters
dt = +1e-02 ; nt = 1e+02 ;


%% 2.   COMPUTATION

%  2.1  Mesh generation
x = (linspace(-L/2,+L/2,np))' ;
h = L/(np-1) ;

%  2.2  Semi-discrete operators
e = ones(np,1) ;
M = spdiags(e,0,np,np) ;
A = spdiags(-(nu/h^2)*[+1*e -2*e +1*e],[-1:1],np,np) ;

%  2.3  Discrete operators
H = M/dt   ;
R = M/dt-A ;

%  2.4  Boundary conditions
H( 1, :) = 0 ; H( 1, 1) = 1 ;
H(np, :) = 0 ; H(np,np) = 1 ;

R( 1, :) = 0 ; R( 1, 1) = 1 ;
R(np, :) = 0 ; R(np,np) = 1 ;

%  2.5  Time-integration
uh      = zeros(np,nt) ;
uh(:,1) = sin((2*pi/L)*x) ;
for it = 2 : nt
  t(it,1)  = (it-1)*dt ;
  uh(:,it) = H\(R*uh(:,it-1)) ;
end
```

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles qui est résolue numériquement en exécutant ce code Matlab ainsi que les conditions aux limites et initiales.
2. Déterminer les méthodes de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle utilisées.
3. Déterminer la caractère des solutions d'équilibre au niveau semi-discret? Justifiez votre réponse sans forcément faire de calculs.
4. Déterminer la caractère des solutions d'équilibre au niveau discret? Justifiez votre réponse sans forcément faire de calculs.
5. La méthode d'approximation numérique utilisée vous semble-t-elle appropriée pour la résolution de cette équation? Justifiez votre réponse.

4 Analyses de stabilité (20%)

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \tag{3}$$

avec le coefficient $\nu > 0$, des conditions aux limites périodiques et un terme de forçage f.

1. Discrétiser cette équation en espace par un schéma aux différences finies centré du second ordre.
2. Au niveau semi-discret, existe-t-il une restriction sur les paramètres de discrétisation pour conserver le caractère des solutions d'équilibre. Le cas échéant, déterminer cette restriction.
3. Discrétiser les équations semi-discrètes en temps par la méthode d'Euler implicite.
4. Au niveau discret, existe-t-il une restriction sur les paramètres de discrétisation pour conserver le caractère des solutions d'équilibre. Le cas échéant, déterminer cette restriction.

<u>Indication</u>

Les valeurs propres d'une matrice circulaire et tridiagonale

$$\mathbf{L}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \gamma \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

sont données par

$$\sigma^{(k)} = \alpha + (\beta + \gamma)\cos(\psi_k) + \mathrm{i}(\beta - \gamma)\sin(\psi_k), \quad \psi_k = 2\pi \frac{k-1}{\mathrm{p}+1}, \tag{5}$$

où p représente la taille de la matrice.

5 Linéarisation et opérateur adjoint (10%)

On considère l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{6}$$

où f est un terme de forçage et ν le coefficient de diffusion.

1. Etablir, par la méthode de votre choix, la forme linéarisée de cette équation autour d'une solution d'équilibre $\overline{u}(x)$.

2. Déterminer les parties symétrique et anti-symétrique de l'opérateur spatial linéarisé ainsi que son adjoint.

6 Equations de Navier–Stokes (15%)

On considère la situation décrite par la figure 2, c'est-à-dire un fluide de densité ρ et de viscosité μ en écoulement incompressible autour d'un profil d'aile dans un domaine doublement connexe $\boldsymbol{\Omega}$ très grand par rapport à la longueur L. Nous admettrons que les forces volumiques soient nulles, que l'angle

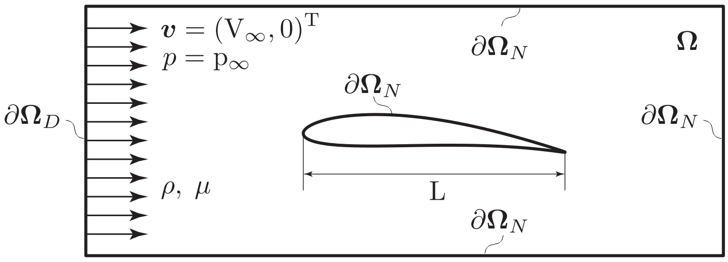

Figure 2: Domaine d'écoulement et définitions.

d'incidence du profil soit très faible, et qu'il y ait adhérence du fluide à la paroi du profil.

On désire connaître le champ de pression $p^{(n)}$ associé à un champ de vitesse instantané $\boldsymbol{v}^{(n)}$ donné. Pour cela, on décide de résoudre une équation de Poisson avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}^2 p^{(n)} = -(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}^{(n)}) : (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}^{(n)})^{\mathrm{T}}, & \text{sur } \boldsymbol{\Omega}, \\ \boldsymbol{\nabla} p^{(n)}\cdot\boldsymbol{n} = 0, & \text{sur } \partial\boldsymbol{\Omega}_N, \\ p^{(n)} = \mathrm{p}_\infty, & \text{sur } \partial\boldsymbol{\Omega}_D, \end{cases} \tag{7}$$

où p_∞ est la pression à l'infini et $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure au domaine.

Compte tenu des paramètres réunis dans le tableau 1 et des hypothèses précédentes, déterminer si la résolution de l'équation de Poisson avec les conditions aux limites (7) permet d'obtenir une bonne approximation du champ de pression $p^{(n)}$ associé au champ de vitesse $\boldsymbol{v}^{(n)}$. Si ce n'est pas le cas, proposer une solution alternative.

Masse volumique	(ρ)	10^0
Viscosité	(μ)	10^{-6}
Vitesse	(V_∞)	10^0
Longueur du profil	(L)	10^0

Table 1: Paramètres.