METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
25 avril 2024

Mini-projets

1 Equation de diffusion - Méthode de Chebyshev

On considère le problème aux limites monodimensionnel

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_{xx}^2 u = f & \text{dans} & \Omega = (0,1), \\ u = g & \text{sur} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

avec le terme source f telle que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{dans} & \Omega_1 = (0,1/2), \\ (x-1/2)^\alpha & \text{dans} & \Omega_2 = (1/2,1), \end{array}\right. \tag{2}$$

et α un entier positif. La fonction u appartient à l'espace de Sobolev $H^\alpha(\Omega)$. Les conditions aux limites de Dirichlet g sont données par la restriction de la solution exacte sur le bord du domaine $\partial\Omega$.

1. Résoudre le problème (1) par une méthode de colocation utilisant la base polynomiale de Chebyshev. Par rapport à la méthode des différences finies telle qu'elle a été présentée en cours, il faut considérer dans ce cas une répartition des noeuds non-homogène dans chaque dimension spatiale donnée par la relation

$$\mathrm{x}_j = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{\mathrm{p}-1}\right)\right), \quad j = 1, \ldots, \mathrm{p}, \tag{3}$$

   avec p le nombre de noeuds de maillage, et des matrices de dérivation obtenues sur la base des polynômes de Chebyshev définis par

$$\phi_0(x) = 1, \tag{4}$$
$$\phi_1(x) = 2x, \tag{5}$$
$$\phi_{n+1}(x) = 2x\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x). \tag{6}$$

2. Etudier l'ordre de convergence de l'approximation numérique u_h obtenue par cette méthode en norme $L_2(\Omega)$ pour différentes valeurs de α et en considérant le théorème suivant:

Si $u \in H^{\mathrm{r}+1}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{\mathrm{r}} |u|_{H^{\mathrm{r}+1}(\Omega)}, \tag{7}$$

avec r un entier positif. En d'autre termes, si $u \in H^{\mathrm{r}+1}(\Omega)$ la convergence est au plus de l'ordre r.

2 Equation d'advection diffusion - Maillage non-uniforme

On considère le problème aux limites monodimensionnel

$$\begin{cases} -\nu\, \partial^2_{xx} u + \mathrm{c}\, \partial_x u = 0, \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) = 0,\ u(1) = 1, \end{cases} \tag{8}$$

avec ν le coefficient de diffusion, c la vitesse d'advection, et dont la solution exacte est

$$u(x) = \frac{\exp\left(\frac{\mathrm{c}x}{\nu}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\mathrm{c}}{\nu}\right) - 1} = \frac{\exp\left(\frac{\mathrm{c}}{\nu}(x-1)\right) - \exp\left(-\frac{\mathrm{c}}{\nu}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{c}}{\nu}\right)}. \tag{9}$$

1. Résoudre le problème (8) par une méthode de colocation aux différences finies centrées du second ordre pour tous les termes en considérant une répartition des noeuds non-homogène donnée par la relation
$$\mathrm{x}_j = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{\mathrm{p}-1}\right)\right), \quad j = 1, \ldots, \mathrm{p}, \tag{10}$$
avec p le nombre de noeuds.
2. Implémenter ensuite des méthodes *Upwind* du premier et du second ordre.
3. Pour ces trois méthodes, tracer l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction du Péclet local et en déduire leur ordre de convergence respectif.
4. Dans chaque cas, comparer les erreurs obtenues avec la répartion de noeuds non-homogène à celles obtenues avec une répartition homogène.

3 Equation de diffusion - Méthode des différences finies compactes

On considère le problème aux limites monodimensionnel

$$-\nu\, \partial^2_{xx} u = f, \quad x \in \Omega = (-1, 1), \tag{11}$$

avec ν le coefficient de diffusion, le terme de forçage f tel que la solution exacte soit

$$u(x) = \cos(\mathrm{k}x), \quad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\mathrm{L}}, \tag{12}$$

avec la longueur du domaine $\mathrm{L} = 2$ et des conditions aux limites périodiques. On note la dérivée n-ième de u par rapport à x, évaluée au noeud i

$$\mathrm{u}_i^{(n)} = \left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{\mathrm{x}_i}$$

et on considère une approximation aux différences finies compactes de la forme

$$\alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(2)} + \mathrm{u}_i^{(2)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(2)} \simeq \frac{\delta}{h^2}\mathrm{u}_i^{(0)} + \frac{\beta}{h^2}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} + \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{h^2}(\mathrm{u}_{i+2}^{(0)} + \mathrm{u}_{i-2}^{(0)})$$

avec h l'intervalle entre deux noeuds de maillage successifs.

Résoudre le problème (11) par une méthode de colocation en utilisant des schémas aux différences finies compactes et en considérant les quatre cas suivants:

1. $\alpha = \gamma = 0$, β à déterminer pour obtenir une approximation du second ordre,
2. $\alpha = 0$, β et γ à déterminer pour obtenir une approximation du quatrième ordre,
3. $\gamma = 0$, α et β à déterminer pour obtenir une approximation du quatrième ordre,
4. γ, α et β à déterminer pour obtenir une approximation du sixième ordre.

Etudier l'évolution de l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction de l'intervalle de discrétisation h et vérifier que l'ordre de convergence correspond aux estimations théoriques.

4 Equation de Korteweg de Vries - Analyse de stabilité linéaire

Les vagues *scélérates* font partie des trains d'onde constituant l'état de la mer et sont caractérisées par une longueur d'onde analogue à celle de leurs voisines. Leur spécificité consiste en un profil beaucoup plus abrubt et une hauteur environ deux fois plus grande, pouvant atteindre 30 mètres.

Figure 1: Vagues scélérates.

Des études menées en canal de houle sur des vagues se propageant dans une seule direction ont montré qu'il peut y avoir jusqu'à 100 fois plus de vagues scélérates que la théorie linéaire ne le prévoit. La fréquence d'apparition est donc nécessairement liée à des phénomènes non-linéaires. D'après certaines hypothèses, la vague scélérate pourrait apparaître en empruntant de l'énergie à ses voisines puis devrait se propager de manière stable sans se déformer.

Les vagues scélérates pourraient ainsi correspondre à des solutions particulières d'équations non-linéaires appelées solitons, c'est-à-dire à des ondes qui se propagent sans que leur forme ne change. La propagation d'une telle vague pourrait être décrite par l'équation de Korteweg–de Vries donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Pour chercher une solution de type soliton se déplaçant à la vitesse c, on suppose que l'onde puisse s'exprimer comme

$$u(x,t) = s(x - \mathrm{c}t) = s(y). \tag{14}$$

L'équation de Korteweg–de Vries se réduit ainsi sous la forme de l'équation différentielle ordinaire et non-linéaire

$$\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}y^3} + (6s - \mathrm{c})\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{15}$$

La résolution de cette équation permet de trouver la forme du soliton qui se propage à la vitesse c

$$s(y) = \frac{\mathrm{c}}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{\mathrm{c}}\right). \tag{16}$$

Pour que le soliton puisse effectivement se déplacer sans déformation, il doit être stable par rapport aux perturbations inhérentes au milieu marin, comme le vent ou les autres vagues.

1. Nous proposons d'étudier la stabilité linéaire du soliton (23) en fonction de sa vitesse de propagation. Pour ce faire, nous supposons que la solution de l'équation de Korteweg–de Vries soit issue de la superposition du soliton s et d'une perturbation u'

   $$u(x,t) = s(y) + \epsilon u'(x,t), \tag{17}$$

   où ϵ est une constante suffisamment petite pour rester dans le cas linéaire. L'évolution de la perturbation peut ainsi être décrite par l'équation de Korteweg–de Vries linéarisée autour du soliton

   $$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial^3 u'}{\partial x^3} + 6s\frac{\partial u'}{\partial x} + 6\frac{\partial s}{\partial x}u' = 0. \tag{18}$$

   En admettant une solution à variables séparables et une dépendance temporelle harmonique, on écrit

   $$u'(x,t) = \hat{u}(x)\exp(\lambda t), \tag{19}$$

où $\hat{u}$ et λ représentent respectivement les formes et pulsations propres des perturbations. L'équation (18) se réduit ainsi sous la forme

$$\lambda \hat{u} + \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 6s\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + 6\frac{\partial s}{\partial x}\hat{u} = 0. \tag{20}$$

Après discrétisation spatiale, cette équation s'écrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé donné par

$$\lambda \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{A}(\mathbf{s})\hat{\mathbf{u}} = 0, \tag{21}$$

permettant de déterminer la stabilité des solitons en fonction de leur vitesse de propagation.

5 Equation de Benjamin-Bona-Mahony - Analyse de stabilité linéaire

On considère le même problème qu'au sujet prédédent (section 4) mais en supposant que la propagation des ondes est gouvernée par l'équation de Benjamin-Bona-Mahony

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \tag{22}$$

Dans ce cas, le soliton est donné par la relation

$$s(y) = \frac{3\mathrm{c}^2}{1-c^2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}(cx - \frac{ct}{1-c^2})\right), \tag{23}$$

et l'équation linéarisée en régime harmonique s'écrit

$$\lambda\hat{u} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + s\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u}\frac{\partial s}{\partial x} - \lambda\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0. \tag{24}$$

6 Equation des ondes

On aimerait étudier la propagation d'ondes acoustiques à l'intérieur d'un Cor de Alpes. Pour cela, nous

Figure 2: Cor des Alpes.

supposons que les ondes de pression puissent être décrites par l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}, \tag{25}$$

où c représente leur célerité. En admettant que la longueur d'onde longitudinale l soit beaucoup plus petite que la longueur caratéristique de l'instrument, nous supposons que la solution de l'équation de d'Alembert s'écrive sous la forme

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \hat{u}(x, y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{26}$$

où $\hat{u}$ représente le mode propre transversal, ω sa pulsation, et k son nombre d'onde longitudinal. En substituant cette relation dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$\left((ck)^2 - \omega^2\right) \hat{u} - c^2 \widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2 \hat{u} = 0, \tag{27}$$

avec $\widehat{\boldsymbol{\nabla}} = (\partial_x, \partial_y)$ l'opérateur laplacien transversal. Après discrétisation spatiale, cette équation s'écrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé donné par

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} = \lambda \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}, \quad \lambda = k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \tag{28}$$

1. En supposant des parois infiniment rigides et une section carée de taille L constante, déterminer analytiquement les modes propres transversaux ainsi que leur pulsation.

2. Déterminer numériquement ces mêmes grandeurs et procéder à une étude de convergence des résultats numériques. En déduire l'ordre de convergence des différents modes propres.

3. Etablir et interpréter la relation de dispersion inverse k(ω), avec k $\in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. En déduire quels modes peuvent se propager, et quels modes sont atténués, à travers l'instrument.