METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 28 mars 2024

Laboratoire III

1 Equation d'advection

On considère l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{c}\, \partial_x u = 0, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \Omega = (-1,1], \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

avec c la vitesse d'advection et des conditions aux limites périodiques. La solution exacte est donnée par

$$u(x,t) = u_0(x - \mathrm{c}t), \quad \forall u_0. \tag{2}$$

1. La fonction gaussienne est une fonction propre de la transformée de Fourier. Elle resulte donc de la superposition d'ondes de fréquence voisine (paquet d'onde gaussien), ce qui permet d'étudier le phénomène de dispersion numérique. Ainsi, en utilisant la condition initiale

   $$u_0 = \exp\left(-(10x)^2\right), \tag{3}$$

   analyser l'influence du paramètre de la méthode-theta, du nombre de Courant et du type de dicrétisation spatiale (différences finies centrés du second ordre ou Upwind du premier ordre) sur ce phénomène.

2. Que se passe-t-il si on utilise une discrétisation spatiale Upwind du premier ordre, la méthode d'Euler explicite ($\theta = 0$) et que l'on impose le nombre de Courant égal à l'unité?

3. Répéter ce dernier point avec la condition initiale

   $$u_0 = \lim_{\sigma \to \infty} \exp\left(-(10x)^{2\sigma}\right). \tag{4}$$

   En pratique, on choisira σ suffisamment grand.

4. Analyser le spectre de valeurs propres issu de l'analyse de stabilité linéaire pour une discrétisation spatiale aux différences finies centrées du second ordre puis Upwind du premier ordre. Déterminer la consistance de chaque méthode.

5. Analyser le spectre de valeurs propres issu de l'analyse de stabilité numérique pour les différentes valeurs caractéristiques de θ et pour les deux méthodes de discrétisation spatiale considérées. Déterminer la consistance de chaque combinaison de méthode de discrétisation spatiale et temporelle.

2 Equation de Burgers

On considère ici le trafic routier d'un point de vue macroscopique en étudiant la densité de trafic $\rho(x,t)$, c'est-à-dire le nombre de véhicules présents par unité de longueur. En notant par $v(x,t)$ leur vitesse à

Figure 1: Vue macroscopique du trafic routier.

la position x et au temps t, le flux de véhicules s'écrit

$$\phi = \rho v. \tag{5}$$

Le flux de trafic doit vérifier l'équation de conservation de la masse, analogue à celle rencontrée en mécanique des fluides, donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = f, \tag{6}$$

où le terme de forçage f représente les véhicules quittant ou rejoignant la route. La relation entre la vitesse et la densité de trafic peut être obtenue par le truchement d'une loi phénoménologique telle que

$$v = \hat{v}\left(1 - \frac{\rho}{\hat{\rho}}\right) - \frac{\kappa}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{7}$$

Le premier terme de cette relation signifie que la vitesse des véhicules atteint la valeur maximale $\hat{v}$ lorsque la densité tend vers zéro, alors qu'elle s'annule lorsque la densité atteint son maximum $\hat{\rho}$. Le second terme signifie que les conducteurs réduisent en moyenne leur vitesse lorsque le trafic se densifie devant eux. En remplaçant la relation (7) dans l'équation de conservation de la masse (6), on obtient l'équation d'évolution suivante pour la densité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + (\hat{v} - 2\hat{\nu}\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = f, \tag{8}$$

avec $\hat{\nu} = \hat{v}/\hat{\rho}$. L'introduction du changement de variable linéaire $u = \hat{v} - 2\hat{\nu}\rho$ permet de se ramener à l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \hat{f}, \tag{9}$$

où $\hat{f} = -2\hat{\nu}f$. De manière à étudier l'évolution du trafic dans une situation donnée, on considère le problème aux valeurs initiales et aux limites

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \Omega = (0,2), \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x), & \end{array}\right. \tag{10}$$

avec des conditions aux limites périodiques, ce qui correspond à la situation où les véhicules roulent en circuit fermé.

1. En vous basant sur le code implémenté dans le fichier Unsteady_Advection_FDM_1D.m utilisé dans l'exercice précédant, implémenter la résolution du problème (10) dans un code Matlab en utilisant une discétisation spatiale aux différences finies centrées du second ordre, la méthode de Crank–Nicolson pour la discrétisation temporelle, et la méthode de Picard pour la résolution de systèmes d'équations non-linéaires.

2. Etudier l'évolution de l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction de l'intervalle de discrétisation spatiale et temporel sachant que la solution analytique du problème (10) est donnée par la série

$$u(x,t) = 2\pi\kappa \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\kappa t} n \, \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\kappa t} \cos(n\pi x)}, \tag{11}$$

avec

$$a_n = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi\kappa}\right) \cos(n\pi x)\, dx.$$

En déduire l'ordre spatial et temporel de la méthode et le comparer aux estimations théoriques.

3. Qu'observez-vous en prenant en compte la conditions initiale $u_0(x) = 1 + \sin(\pi x/2)$?