METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 14 mars 2024

Laboratoire I

1 Equation de diffusion stationnaire

On considère le problème aux limites

$$-\nu\, \partial_{xx}^2 u = f, \quad x \in \Omega = (-1, 1), \tag{1}$$

avec ν le coefficient de diffusion, le terme de forçage f tel que la solution exacte soit

$$u(x) = \cos(\mathrm{k}x + \pi/4), \quad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\mathrm{L}}, \tag{2}$$

et L la longueur du domaine Ω. On désire imposer des conditions aux limites de Dirichlet à gauche et de Neumann à droite qui sont obtenues par restriction de la solution exacte au bord du domaine Ω.

1. En utilisant un schéma aux différences finies centré du second ordre, montrer que le problème (1) s'écrit sous la forme discrète

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\mathrm{u}_{i-1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i = 2, \ldots, \mathrm{p}-1, \\ \mathrm{u}_1 = u(-1),\ \dfrac{\mathrm{u}_{\mathrm{p}-2} - 4\mathrm{u}_{\mathrm{p}-1} + 3\mathrm{u}_\mathrm{p}}{2h} = \partial_x u(+1), \end{cases} \tag{3}$$

   où h représente l'intervalle entre les p noeuds de collocation distribués uniformément sur le domaine Ω.

2. Ecrire le problème discret sous la forme matricielle équivalente

$$\mathbf{Au} = \mathbf{Mf}, \tag{4}$$

   en explicitant les composantes des matrices de discrétisation $[\mathbf{A}]_{ij}$ et de masse $[\mathbf{M}]_{ij}$.

3. Résoudre ce problème à l'aide du code Matlab `Lab01.m` ou Python `Lab01.py` à disposition sur le site web du cours.

4. Etudier l'évolution de l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction de l'intervalle de discrétisation $h = 1/2^i$. En déduire l'ordre spatial de la méthode et le comparer aux estimations théoriques.

5. Dériver un schéma de discrétisation qui soit du quatrième ordre pour l'approximation de l'opérateur spatial et des conditions aux limites de Neumann puis répéter les points précédents.