Méthodes de discrétisation en fluides

10. Equations de Stokes stationnaires

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 2 mai 2024

Contenu

Equations de Navier–Stokes

Formulation dimensionnelle

On considère les équations de Navier–Stokes

$$\rho(\overbrace{\partial_t \boldsymbol{v}}^{\left[\frac{\rho \mathrm{V}}{\mathrm{T}}\right]} + \overbrace{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}}^{\left[\frac{\rho \mathrm{V}^2}{\mathrm{L}}\right]}) = \overbrace{-\boldsymbol{\nabla} p}^{\left[\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{L}}\right]} + \overbrace{\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}}^{\left[\frac{\mu \mathrm{V}}{\mathrm{L}^2}\right]} + \overbrace{\rho \boldsymbol{g}}^{\left[\frac{\rho \mathrm{V}}{\mathrm{T}}\right]}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}}_{\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}\right]} = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{L}\ \widehat{\boldsymbol{x}}$$
$$t = \mathrm{T}\ \widehat{t}$$
$$\boldsymbol{v} = \mathrm{V}\ \widehat{\boldsymbol{v}}$$
$$p = \mathrm{P}\ \widehat{p}$$

En utilisant les variables adimensionnelles, on a

$$\left(\frac{\rho \mathrm{V}}{\mathrm{T}}\right) \partial_{\widehat{t}} \widehat{\boldsymbol{v}} + \left(\frac{\rho \mathrm{V}^2}{\mathrm{L}}\right) \widehat{\boldsymbol{v}}\cdot\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{L}}\right)\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \left(\frac{\mu \mathrm{V}}{\mathrm{L}^2}\right)\widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \left(\frac{\rho \mathrm{V}}{\mathrm{T}}\right)\widehat{\boldsymbol{g}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}\right)\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

Equations de Navier–Stokes

Formulations adimensionnelles

- avec le temps d'advection $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$, on obtient

$$\partial_{\widehat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \mathrm{Re}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

- avec le temps de diffusion $\mathrm{T} = \frac{\rho \mathrm{L}^2}{\mu}$, on obtient

$$\partial_{\widehat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Re}\,\widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

où le nombre de Reynolds $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{V} \mathrm{L}}{\mu}}$

Equations de Navier–Stokes

Niveau de pression

On définit le noyau du gradient

$$\ker(\boldsymbol{\nabla}) = \{f : \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{0}\} = \{ \text{ const } \}$$

Soit $(\boldsymbol{v}, p)$ une solution des équations de Navier–Stokes. Cette solution n'est pas affectée par toute perturbation de pression $p' \in \ker(\boldsymbol{\nabla})$. En effet,

$$\rho(\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\nabla}(p + \underbrace{p'}_{= \text{const}}) + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g}$$

La pression peut ainsi subir des perturbations dans le noyau du gradient sans affecter la vitesse. Elle est ainsi définie à une constante près.

Equations de Navier–Stokes

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$
$$\partial_{\widehat{t}} \widehat{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Re}\ \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \widehat{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\nabla} \widehat{p} + \boldsymbol{\nabla}^2 \widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$

Limite de Stokes

A la limite $\mathrm{Re} \to 0$, on peut négliger le terme d'advection. On obtient ainsi les équations de Stokes

$$\rho\, \partial_t \boldsymbol{v} - \mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dans le cas stationnaire, elles se réduisent à

$$-\mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Equations de Navier–Stokes

$$-\mu\ \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Limite de Stokes

ce qui s'écrit explicitement sous la forme

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$
$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Différences finies

Opérateurs de dérivation discrets - Dérivée première selon x, schéma centré

- Série de Taylor

$$\mathrm{U}_{i+1,j} = \mathrm{U}_{ij} + \frac{h_x}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)$$

$$\mathrm{U}_{i-1,j} = \mathrm{U}_{ij} - \frac{h_x}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} - \frac{h_x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)$$

- Différence des deux séries

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} = \frac{\mathrm{U}_{i+1,j} - \mathrm{U}_{i-1,j}}{2h_x} \underbrace{-\frac{h_x^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)}_{\epsilon=\mathcal{O}(h_x^2)}$$

Différences finies

Opérateurs de dérivation discrets - Dérivée première selon y, schéma centré

- Série de Taylor

$$\mathrm{U}_{i,j+1} = \mathrm{U}_{ij} + \frac{h_y}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)$$

$$\mathrm{U}_{i,j-1} = \mathrm{U}_{ij} - \frac{h_y}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} - \frac{h_y^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)$$

- Différence des deux séries

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} = \frac{\mathrm{U}_{i,j+1} - \mathrm{U}_{i,j-1}}{2h_y} \underbrace{-\frac{h_y^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)}_{\epsilon=\mathcal{O}(h_y^2)}$$

Différences finies

Opérateurs de dérivation discrets - Dérivée seconde selon x, schéma centré

- Série de Taylor

$$\mathrm{U}_{i+1,j} = \mathrm{U}_{ij} + \frac{h_x}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)$$

$$\mathrm{U}_{i-1,j} = \mathrm{U}_{ij} - \frac{h_x}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} - \frac{h_x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)$$

- Somme des deux séries

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} = \frac{\mathrm{U}_{i+1,j} - 2\mathrm{U}_{ij} + \mathrm{U}_{i-1,j}}{h_x^2} \underbrace{-\frac{2h_x^2}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_x^4)}_{\epsilon=\mathcal{O}(h_x^2)}$$

Différences finies

Opérateurs de dérivation discrets - Dérivée seconde selon y, schéma centré

- Série de Taylor

$$\mathrm{U}_{i,j+1} = \mathrm{U}_{ij} + \frac{h_y}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)$$

$$\mathrm{U}_{i,j-1} = \mathrm{U}_{ij} - \frac{h_y}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} + \frac{h_y^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} - \frac{h_y^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)$$

- Somme des deux séries

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} = \frac{\mathrm{U}_{i,j+1} - 2\mathrm{U}_{ij} + \mathrm{U}_{i,j-1}}{h_y^2} \underbrace{-\frac{2h_y^2}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|_{\mathbf{x}_{ij}} \pm \mathcal{O}(h_y^4)}_{\epsilon=\mathcal{O}(h_y^2)}$$

Différences finies

Discrétisation colocative

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$
$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

En utilisant ces approximations, les équations de Stokes stationnaires deviennent

$$-\mu\left(\frac{\mathrm{V}_{x,i+1,j}-2\mathrm{V}_{x,ij}+\mathrm{V}_{x,i-1,j}}{h_x^2}+\frac{\mathrm{V}_{x,i,j+1}-2\mathrm{V}_{x,ij}+\mathrm{V}_{x,i,j-1}}{h_y^2}\right)=-\frac{\mathrm{P}_{i+1,j}-\mathrm{P}_{i-1,j}}{2h_x}+\rho\mathrm{G}_{x,ij}$$
$$-\mu\left(\frac{\mathrm{V}_{y,i+1,j}-2\mathrm{V}_{y,ij}+\mathrm{V}_{y,i-1,j}}{h_y^2}+\frac{\mathrm{V}_{y,i,j+1}-2\mathrm{V}_{y,ij}+\mathrm{V}_{y,i,j-1}}{h_y^2}\right)=-\frac{\mathrm{P}_{i,j+1}-\mathrm{P}_{i,j-1}}{2h_y}+\rho\mathrm{G}_{y,ij}$$
$$\frac{\mathrm{V}_{x,i+1,j}-\mathrm{V}_{x,i-1,j}}{2h_x}+\frac{\mathrm{V}_{y,i,j+1}-\mathrm{V}_{y,i,j-1}}{2h_y}=0$$

ce qui s'écrit sous la forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_x=-\mathbf{D}_x\mathbf{p}+\mathbf{M}\mathbf{g}_x$$
$$\mathbf{A}\mathbf{v}_y=-\mathbf{D}_y\mathbf{p}+\mathbf{M}\mathbf{g}_y$$
$$\mathbf{D}_x\mathbf{v}_x+\mathbf{D}_y\mathbf{v}_y=\mathbf{0}$$

Différences finies

Discrétisation colocative

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x$$
$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

et de manière équivalente

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x\\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{D}_y\\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_x\\ \mathbf{v}_y\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\mathbf{g}_x\\ \mathbf{M}\mathbf{g}_y\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Puis, en définissant l'opérateur gradient discret $\mathbf{G}=(\mathbf{D}_x\ \mathbf{D}_y)^{\mathrm{T}}$, on a

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{G}\\ \mathbf{D} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\mathbf{g}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}}$$

avec $\mathbf{D}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_x\ \mathbf{v}_y)^{\mathrm{T}}$

Différences finies

Pression parasite

On définit le noyau du gradient discret

$$\ker(\mathbf{G}) = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{\mathrm{p}} \mid \mathbf{Gf} = \mathbf{0}\} \neq \{\ \mathbf{const}\ \}$$

Soit $(\mathbf{v}, \mathbf{p})$ une solution des équations de Stokes discrètes. Cette solution n'est pas affectée par toute perturbation de pression $\mathbf{p}' \in \ker(\mathbf{G})$. En effet,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} + \mathbf{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mg} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

La pression peut ainsi subir des perturbations dans le noyau du gradient discret sans affecter la vitesse

Différences finies

Pression parasite

On considère la perturbation de pression parasite $\mathbf{p}'$ en échiquier telle que

$$\mathrm{P}'_{ij} = \begin{cases} +1, & i+j \text{ pair} \\ -1, & i+j \text{ impair} \end{cases}$$

Pour un noeud $\mathbf{x}_{ij}$ pair (+) ou impair (-), on a

$$\mathrm{P}'_{ij,x} = \frac{\mathrm{P}'_{i+1,j} - \mathrm{P}'_{i-1,j}}{2h_x} = \pm\frac{1-1}{2h_x} = 0, \quad \forall i,j$$

$$\mathrm{P}'_{ij,y} = \frac{\mathrm{P}'_{i,j+1} - \mathrm{P}'_{i,j-1}}{2h_y} = \pm\frac{1-1}{2h_y} = 0, \quad \forall i,j$$

On a ainsi

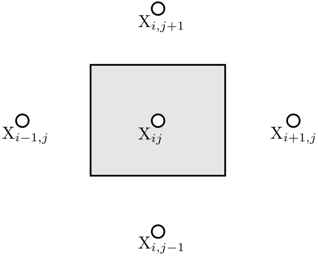
$$\boxed{\mathbf{p}' \in \ker(\mathbf{G}), \quad \mathbf{p}' \neq \mathbf{const}}$$

Différences finies

Discrétisation décalée

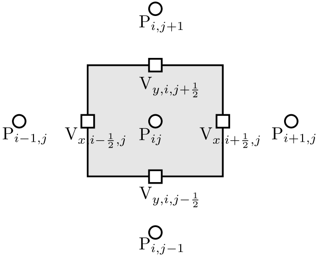
Discrétisation colocative

Vitesses et pression exprimées aux mêmes noeuds



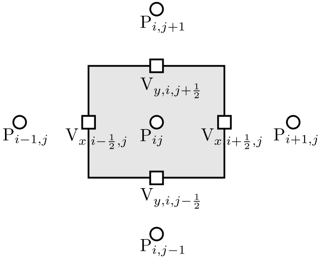
Discrétisation décalée

Chaque variable (v_x, v_y et p) a ses propres noeuds



Différences finies

Discrétisation décalée



- La grille décalée permet de supprimer le mode de pression parasite en échiquier
- Il est difficile d'utiliser cette approche pour des géométries complexes

Eléments finis

$$-\mu\ \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla} p = \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Formulation intégrale

Les équations de Stokes stationnaires peuvent s'écrire en termes de contraintes

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\overbrace{(-p\boldsymbol{I} + \underbrace{\mu(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})}_{=\boldsymbol{\tau}})}^{=\boldsymbol{\sigma}} = \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Sous forme intégrale, ceci s'écrit

$$-\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w}\,dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w}\,dV, \quad \forall\boldsymbol{w}\in L^2(\boldsymbol{\Omega})$$
$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\cdot q\,dV = 0, \quad \forall q\in L^2(\boldsymbol{\Omega})$$

Eléments finis

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g} \, dV = \int_{\partial \boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g} \, dS$$

Formulation faible

En partant de la formulation intégrale en termes de contraintes, l'intégration par parties donne

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{w} \, dV - \int_{\partial \boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w} \, dS = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{w} \, dV, \quad \forall \boldsymbol{w} \in H^1(\boldsymbol{\Omega})$$
$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} q \cdot \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \, dV = 0, \quad \forall q \in L^2(\boldsymbol{\Omega})$$

Les conditions aux limites naturelles expriment ainsi l'annulation des contraintes au bord du domaine

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}}$$

Eléments finis

$$-\mu\ \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla} p = \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Formulation faible

En considérant des conditions aux limites naturelles ou de Dirichlet, on a

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \mu(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}\ dV - \int_{\boldsymbol{\Omega}} p\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}\ dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{w}\ dV, \quad \forall\boldsymbol{w}\in H^1(\boldsymbol{\Omega})$$
$$-\int_{\boldsymbol{\Omega}} q\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\ dV = 0, \quad \forall q\in L^2(\boldsymbol{\Omega})$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \mathcal{D}(p,\boldsymbol{w}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{w}), \quad \forall\boldsymbol{w}\in H^1(\boldsymbol{\Omega})$$
$$\mathcal{D}(q,\boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall q\in L^2(\boldsymbol{\Omega})$$

Eléments finis

Discrétisation

On considère l'approximation de la formulation faible

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) + \mathcal{D}(p_h, \boldsymbol{w}_h) = \mathcal{F}(\boldsymbol{w}_h), \quad \forall \boldsymbol{w}_h \in W_h \subset H^1(\boldsymbol{\Omega})$$
$$\mathcal{D}(q_h, \boldsymbol{v}_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \subset L^2(\boldsymbol{\Omega})$$

avec la méthode de Galerkin, c'est-à-dire avec

$$v_{k,h} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}_v} \mathrm{v}_{k,j} \phi_j^{(v)}(\boldsymbol{x}) \qquad p_h = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}_p} \mathrm{p}_j \phi_j^{(p)}(\boldsymbol{x})$$

$$w_{k,h} = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}_v} \mathrm{w}_{k,i} \phi_i^{(v)}(\boldsymbol{x}) \qquad q_h = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}_p} \mathrm{q}_i \phi_i^{(p)}(\boldsymbol{x})$$

Eléments finis

Pression parasite

En analysant les degrés polynomiaux de chaque terme, on a

$$\int_{\Omega} \underbrace{\overbrace{\mu(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_h + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}_h^{\mathrm{T}})}^{n_v-1} \cdot \overbrace{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{w}_h}^{n_v-1}}_{(n_v-1)^2} \, dV - \int_{\Omega} \underbrace{\overbrace{p_h}^{n_p} \cdot \overbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}_h}^{n_v-1}}_{n_p(n_v-1)} \, dV = \int_{\Omega} \underbrace{\overbrace{\rho\boldsymbol{g}_h}^{n_v} \cdot \overbrace{\boldsymbol{w}_h}^{n_v}}_{n_v^2} \, dV$$

$$-\int_{\Omega} \underbrace{\overbrace{q_h}^{n_p} \cdot \overbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_h}^{n_v-1}}_{n_p(n_v-1)} \, dV = 0$$

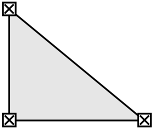
Pour éviter l'apparition de modes de pression parasites, on choisit

$$\boxed{n_p = n_v - 1}$$

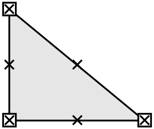
On assure ainsi la compatibilité des degrés polynomiaux pour tous les termes.

Eléments finis

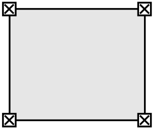
Pression parasite



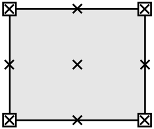
Elément fini P1-P1



Elément fini mixte P2-P1



Elément fini Q1-Q1



Elément fini mixte Q2-Q1

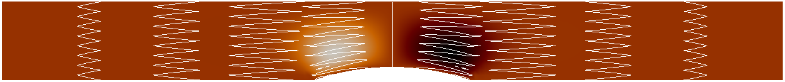
$\square$: pression, $\quad \times$: vitesses

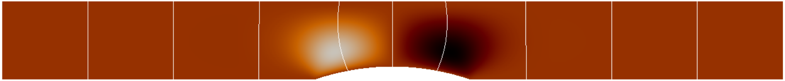
Eléments finis

Pression parasite

Eléments finis Q1-Q1

présence de modes de pression parasites



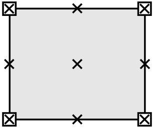


aucun mode de pression parasite

Eléments finis mixtes Q2-Q1

Eléments finis

Pression parasite



- Les éléments finis vérifiant la condition $n_p = n_v - 1$ permettent de supprimer le mode de pression parasite
- On peut naturellement utiliser cette approche pour des géométries complexes

Découplage vitesse-pression

Méthode directe d'Uzawa

$$\mathbf{Av} + \mathbf{Gp} = \mathbf{Mg}$$
$$\mathbf{Dv} = \mathbf{0}$$

En multipliant les équations de quantité de mouvement par $\mathbf{DA}^{-1}$, on obtient une équation pour la pression

$$\underbrace{\mathbf{D}\,\overbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}^{=\mathbf{I}}\,\mathbf{v}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{G}}_{\equiv\mathbf{S}}\,\mathbf{p} = \mathbf{D}\,\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Mg}}_{\equiv\mathbf{v}^*}$$

On peut écrire ces équations sous la forme triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{v}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mg} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Mg} \end{pmatrix}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

Méthode directe d'Uzawa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{v}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mg} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Mg} \end{pmatrix}$$

La substitution inverse pour ce système donne la méthode d'Uzawa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}^* &= \mathbf{Mg} \\ \mathbf{S}\mathbf{p} &= \mathbf{D}\mathbf{v}^* \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{Mg} - \mathbf{Gp} \end{aligned}$$

avec l'opérateur d'Uzawa donné par

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}}$$

- Méthode trop couteuse car elle requiert le calcul de $\mathbf{A}^{-1}$
- Méthode non-utilisée en pratique mais qui sert à la compréhension d'autres méthodes utilisées dans le cas instationnaire

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

Solveur Itératif de Poisson (PISO)

$$-\mu\,\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Sous forme indicielle, les équations de quantité de mouvement s'écrivent

$$-\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

En prenant la divergence, on obtient

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} + \rho\frac{\partial g_i}{\partial x_i} = -\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} = -\mu\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0} = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2 p = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{g})}$$

dont la résolution requiert l'introduction de conditions aux limites.

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

$$-\mu\ \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}p + \rho\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

Solveur Itératif de Poisson (PISo)

En passant sous forme intégrale, on obtient la relation

$$\int_\Omega \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}p}_{=\boldsymbol{\nabla}^2 p} \cdot w\ \mathrm{d}V = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{g})\cdot w\ \mathrm{d}V$$

dont l'intégration par parties donne la forme faible

$$-\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla}w\ \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{n}\cdot w\ \mathrm{d}S = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{w}\ \mathrm{d}V$$

En projectant l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{n}$, il vient

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{n} = (\mu\ \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{n}}$$

Découplage vitesse-pression

Solveur Itératif de Poisson (PISo)

Etant donné $(\boldsymbol{v}^{(0)}, p^{(0)})$, résoudre itérativement

1. l'équation de Poisson pour $p^{(k+1)}$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \boldsymbol{\nabla}^2 p^{(k+1)} & = & \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{g}) & \text{sur } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\nabla} p^{(k+1)} \cdot \boldsymbol{n} & = & (\mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}^{(k)} + \rho \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{n} & \text{sur } \partial\boldsymbol{\Omega} \end{array} \right.$$

2. puis l'équation de Poisson pour $\boldsymbol{v}^{(k+1)}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}^{(k+1)} = -\boldsymbol{\nabla} p^{(k+1)} + \rho \boldsymbol{g} & \text{sur } \boldsymbol{\Omega} \\ \text{C.L. pour } \boldsymbol{v}^{(k+1)} & \text{sur } \partial\boldsymbol{\Omega} \end{array} \right.$$

Découplage vitesse-pression

Solveur Itératif de Poisson (PISO)

Les critères d'arrêt de l'aglorithme itératif étant

- Nombre d'itérations

$$\boxed{k \geq \mathrm{M}}$$

où M est un nombre d'itérations maximal fixé

- Convergence

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} (\mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}_h^{(k)} - \boldsymbol{\nabla} p_h^{(k)} + \rho \boldsymbol{g}_h) \cdot \boldsymbol{w}_h \; dV \leq \tau \quad \forall w_h$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_h^{(k)} \cdot q_h \; dV \leq \tau \quad \forall q_h$$

où τ est une tolérance fixée

Références

- *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund, Cambridge University Press, 2002
- *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 1999
- *Eléments finis pour les fluides incompressibles*, M. Azaiez, M. Deville, E. Mund, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2011