Solutions VII

1 Méthode de Jacobi

1. On considère la méthode de Jacobi exprimée sous la forme

$$\mathbf{x}^{(0)} \text{ donné,} \tag{1}$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}_{\mathrm{J}}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k > 0, \tag{2}$$

avec la matrice d'itération de Jacobi

$$\mathbf{B}_{\mathrm{J}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En calculant le rayon spectral de cette matrice, on trouve

$$\rho(\mathbf{B}_{\mathrm{J}}) = 1. \tag{4}$$

La méthode de Jacobi n'est donc pas convergente pour la résolution de ce système d'équations.

2. Pour la méthode de Jacobi avec relaxation, la matrice d'itération devient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{J}\omega} = \omega\mathbf{B}_{\mathrm{J}} + (1-\omega)\mathbf{I}, \tag{5}$$

où ω est le paramètre de relaxation. Dans ce cas, les valeurs propres de la matrice d'itération sont données par

$$\lambda_1 = 1, \tag{6}$$
$$\lambda_2 = 1 - \omega, \tag{7}$$
$$\lambda_3 = 1 - 2\omega. \tag{8}$$

Ainsi, on a

$$\rho(\mathbf{B}_{\mathrm{J}\omega}) = 1, \quad \forall\omega. \tag{9}$$

La méthode de Jacobi avec relaxation n'est donc pas convergente, et ce quel que soit le paramètre de relaxation.

2 Equation de Helmholtz stationnaire

1. En écrivant l'équation de Helmholtz stationnaire sous forme intégrale et en utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, on obtient

$$-\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \kappa\mathrm{u}_i = \mathrm{f}_i, \quad \forall i. \tag{10}$$

L'utilisation d'une approximation centrée du second ordre pour le terme diffusif conduit à l'expression

$$-\mathrm{u}_{i+1} + (2 + \kappa h^2)\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_{i-1} = h^2\mathrm{f}_i, \quad \forall i. \tag{11}$$

A cause des conditions aux limites périodiques, la matrice de discrétisation est symétrique, circulaire et tridiagonale. On peut ainsi l'écrire sous la forme condensée

$$\mathbf{A} = [\ 2 + \kappa h^2\ ,\ -1\ ]. \tag{12}$$

2. Ceci permet d'obtenir la matrice d'itération de Jacobi

$$\mathbf{B}_{\mathrm{J}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = [\ 0\ ,\ (2 + \kappa h^2)^{-1}\ ] \tag{13}$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda^{(k)} = \frac{2}{2 + \kappa h^2} \cos(\psi_k) < 1, \quad \forall \kappa, h > 0. \tag{14}$$

La méthode de Jacobi est donc toujours convergente pour la résolution de ce problème.