METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 18 avril 2024

Série VII

1 Méthode de Jacobi

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice vaut

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ +1 & -2 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer si la méthode de Jacobi sans relaxation est convergente pour la résolution de ce système d'équations.
2. Déterminer si la méthode de Jacobi avec relaxation est convergente pour la résolution de ce système d'équations.

2 Equation de Helmholtz stationnaire

On considère l'équation de diffusion-reaction stationnaire en une dimension spatiale

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa u = f,$$

avec $\kappa > 0$ et des conditions aux limites périodiques.

1. Discrétiser cette équation avec un schéma aux différences finies centré du second ordre puis écrire le problème discret sous la forme matricielle

$$\mathbf{Au} = \mathbf{Mf}.$$

2. Pour quelles valeurs du coefficient de réaction κ et du pas de discrétisation h la méthode de Jacobi est-elle convergente?

Indication

Les valeurs propres d'une matrice symétrique, circulaire et tridiagonale

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

sont données par

$$\lambda^{(k)} = \alpha + 2\beta \cos(\psi_k), \quad \psi_k = 2\pi \frac{k-1}{\mathrm{p}+1},$$

où p représente la taille du système d'équations.