Méthodes de discrétisation en fluides

7. Equation de Burgers instationnaire

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 28 mars 2024

Contenu

Equations de Navier–Stokes

Formulations adimensionnelles

- Temps d'advection $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$,

$$\partial_{\widehat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \mathrm{Re}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

- Temps de diffusion $\mathrm{T} = \frac{\rho \mathrm{L}^2}{\mu}$,

$$\partial_{\widehat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Re}\, \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

où le nombre de Reynolds $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{VL}}{\mu}}$

Discrétisation spatiale

Formulation forte

Pour se concentrer sur l'aspect non-linéaire des équations de Navier–Stokes, on considère dans un premier temps l'équation de Burgers

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} = f, \quad \Omega = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ u(x, \mathrm{t}_0) = u_0(x) \end{cases}$$

avec des conditions aux limites périodiques et la solution

$$\boxed{u(x,t) \in C^2(\Omega)}$$

Discrétisation spatiale

Formulation intégrale

La formulation intégrale est obtenue par produit scalaire par une fonction test (pondération). On obtient ainsi

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot v \, dV = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Discrétisation spatiale

Différences finies

En utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, il vient

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \delta(\mathrm{x}_i)\, dx = \int_\Omega f \cdot \delta(\mathrm{x}_i)\, dx, \quad \forall i$$

soit

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{x}_i} - \nu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + u \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i$$

Avec une approximation centrée du second ordre, on obtient les équations semi-discrètes sous forme indicielle

$$\dot{\mathrm{u}}_i - \nu \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} + \mathrm{u}_i \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i$$

Discrétisation spatiale

Différences finies

et sous forme matricielle, on a

$$\boxed{\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}}$$

où la matrice de masse $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, et la matrice de discrétisation circulaire et tridiagonale

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = -\frac{\nu}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & +1 & & & +1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ +1 & & & +1 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & +\mathrm{u}_1 & & & -\mathrm{u}_1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -\mathrm{u}_i & 0 & +\mathrm{u}_i & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ +\mathrm{u}_p & & & -\mathrm{u}_p & 0 \end{pmatrix}$$

Discrétisation temporelle

Méthode-θ

Pour la discrétisation temporelle, on écrit le système sous la forme

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\mathbf{f} - \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

Par exemple, en utilisant la méthode-theta, il vient

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}})_{\mathrm{t}^{(n)}} \simeq \frac{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = (1-\theta)\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}) + \theta\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)})$$

étant donné que dans ce cas particulier

$$\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M} = \mathbf{const}$$

Discrétisation temporelle

Méthode-θ

En isolant les termes inconnus à gauche, on obtient le système d'équations algébriques

$$\boxed{\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)})\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n)})\tilde{\mathbf{u}}^{(n)} + (1-\theta)\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n)} + \theta\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n+1)}}$$

où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta\mathbf{A}(\mathbf{u}),$$
$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta-1)\mathbf{A}(\mathbf{u})$$

Pour chaque pas de temps, on doit résoudre un système d'équations non-linéaires de la forme

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Systèmes d'équations non-linéaires

Définition

On considère le système de p équations à p inconnues de la forme

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{A}_{ij}(\{\mathrm{x}_k\})\mathrm{x}_j = \mathrm{b}_i, \quad i,k = 1,\ldots,\mathrm{p}$$

avec les coefficients b_i constants. On peut écrire ce système sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{p}\times\mathrm{p}}$$

$$\mathbf{x},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{p}}$$

Systèmes non-linéaires

$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Méthode itérative de Picard

La méthode de Picard est définie par

$$\mathbf{x}^{(0)} \text{ donné}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\, \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

En définissant le résidu à l'itération $k-1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) &= +\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\, \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b} \\
&= +\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\, \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\, \mathbf{x}^{(k)} \\
&= -\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\, \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}
\end{aligned}$$

avec l'incrément

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}$$

Systèmes non-linéaires

Méthode itérative de Picard

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$
$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}$$

on peut exprimer la méthode de la manière suivante

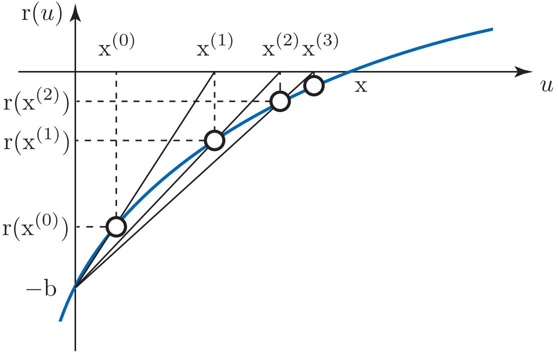
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\text{ donné} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

où la seconde étape est la résolution d'un système d'équations linéaires permettant de déterminer l'incrément.

Systèmes non-linéaires

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\ \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\ \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$

Méthode itérative de Picard



Systèmes non-linéaires

Méthode itérative de Newton

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\ \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$
$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}$$

Pour la méthode de Newton, on écrit le résidu à l'itération k sous la forme

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)})$$

où l'incrément $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}$ est à déterminer. En utilisant un développement de Taylor au premier ordre, on obtient l'approximation

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)}) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{x}^{(k-1)}}}_{\mathbf{L}(\mathbf{x}^{(k-1)})} \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$$

avec $\mathbf{L}$ la matrice jacobienne. Ceci est un système d'équations linéaires permettant de déterminer l'incrément.

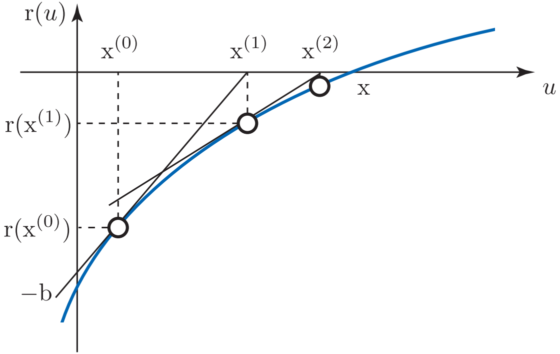
Systèmes non-linéaires

Méthode itérative de Newton

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)}) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \left.\frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\mathbf{x}^{(k-1)}} \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$$



Systèmes non-linéaires

Méthode itérative de Newton

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\ \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) + \mathbf{L}(\mathbf{x}^{(k-1)})\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$$

On peut donc définir la méthode de Newton par l'algorithme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\text{ donné} \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}^{(k-1)})\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

avec la matrice jacobienne

$$\boxed{\mathrm{L}_{ij}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \left.\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}^{(k-1)}}}$$

obtenue par discrétisation de l'opérateur continu linéarisé.

Systèmes non-linéaires

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}$$

Méthode itérative de Newton avec relaxation

Pour améliorer la robustesse de la méthode, on peut relaxer les itérations

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\ \text{donné} \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}^{(k-1)})\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k \geq 0 \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k-1)} + \lambda^{(k)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}, \quad \lambda^{(k)} \in]0,1] \end{aligned}$$

où le paramètre $\lambda^{(k)}$ est déterminé de telle sorte que

$$||\ \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)} + \lambda^{(k)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)})\ || < ||\ \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k-1)})\ ||$$

On peut procéder de manière analogue pour la méthode de Picard.

Systèmes d'équations non-linéaires

Critères d'arrrêt

- Nombre d'itérations

$$k \geq \mathrm{M}$$

où M est un nombre d'itérations maximal fixé

- Convergence

$$\frac{||\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})||}{||\mathbf{f}||} \leq \tau$$

où τ est une tolérance fixée

Références

- *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund, Cambridge University Press, 2002
- *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 1999