

Exercices IX

1 Différences finies compactes

Soit une fonction u qui dépend de l'espace x définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow u(x). \end{aligned}$$

On suppose que la fonction $u \in C^5(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que ses cinq premières dérivées sont continues. On note sa dérivée n -ième par rapport à x , évaluée au noeud x_i

$$u_i^{(n)} = \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{x_i},$$

et on considère l'approximation aux différences finies compactes

$$\alpha u_{i+1}^{(1)} + u_i^{(1)} + \alpha u_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h} (u_{i+1}^{(0)} - u_{i-1}^{(0)}), \quad (1)$$

avec le pas de discrétisation

$$h = x_i - x_{i-1}, \quad \forall i.$$

1. En posant $\alpha = 0$, déterminer le coefficient β pour que l'approximation (1) soit du second ordre en h .
2. En développant tous les termes de la relation (1) en série de Taylor, déterminer l'erreur d'approximation dans le cas général.
3. Etablir un système d'équations pour les coefficients α et β de manière à ce que l'approximation (1) soit du quatrième ordre en h , puis déterminer ces coefficients.
4. Pourquoi le schéma trouvé au point 3 est-il qualifié de compact? Discuter ses avantages et ses inconvénients par rapport au schéma établi au point 1 avec $\alpha = 0$.