Méthodes de discrétisation en fluides

9. Différences finies compactes

Marc A. Habisreutinger

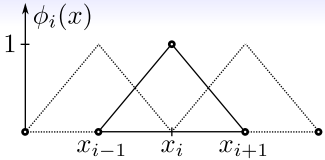
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 18 avril 2024

Contenu

Interpolation

Cas mono-dimensionnel



- Base d'interpolation

$$\mathbb{B} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{\mathrm{p}}, \ldots\}$$

- Expression dans la base

$$\underbrace{u(x,t)}_{\text{esp. physique}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \overbrace{\underline{\mathrm{u}}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \; \phi_j(x) \; + \; \underbrace{\tau(x,t,\mathrm{p})}_{\text{troncature à l'ordre p}}$$

Interpolation

$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x) + \tau(x,t,\mathrm{p})$

Cas mono-dimensionnel

- Approximation

  Troncature de la série

$$u(x,t) \simeq u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$$

- Convergence

$$\lim_{\mathrm{p}\to\infty} \tau(x,t,\mathrm{p}) = 0,$$

  c'est-à-dire

$$\lim_{\mathrm{p}\to\infty} u(x,t) - u_h(x,t) = 0$$

Interpolation

$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$

Cas mono-dimensionnel

- Noeuds de collocation

$$\mathbb{X} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{p}\}, \quad \mathrm{x}_i \in \Omega$$

- Valeurs nodales

$$\overbrace{\mathrm{u}_i(t)}^{\text{esp. nodal}} = u_h(\mathrm{x}_i, t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \overbrace{\underline{\mathrm{u}}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \phi_j(\mathrm{x}_i)$$

$$\underbrace{\mathbf{u}}_{\text{nodal}} = \mathbf{\Phi} \underbrace{\underline{\mathbf{u}}}_{\text{modal}}, \quad [\mathbf{\Phi}]_{ij} = \phi_j(\mathrm{x}_i)$$

- Opérateur de transformation

espace nodal $\leftrightarrow$ espace modal

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{u} \equiv \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$$

Interpolation

$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$

Cas mono-dimensionnel

- Approximation

$$\partial_x u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\ \mathrm{d}_x\phi_j(x)$$

- Valeurs nodales

$$\mathrm{u}_{i,x}(t) = \partial_x u_h(x,t)|_{x=\mathrm{x}_i} = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\ \mathrm{d}_x\phi_j|_{x=\mathrm{x}_i}$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}, \quad [\mathbf{\Phi}_{,x}]_{ij} = \mathrm{d}_x\phi_j|_{x=\mathrm{x}_i}$$

Interpolation

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{u} \equiv \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$$

Cas mono-dimensionnel

- Opérateurs nodaux et modaux

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{D}\ \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}}\ \mathbf{u}$$
$$\underline{\mathbf{u}}_{,x} = \underline{\mathbf{D}}\ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}$$

- Relations entre opérateurs nodaux et modaux

  Valables pour un opérateur discret quelconque

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}} = \overbrace{\mathbf{\Phi}\underline{\mathbf{\Phi}}}^{=\mathbf{I}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\ \underline{\mathbf{D}}\ \underline{\mathbf{\Phi}}$$
$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underbrace{\underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}}_{=\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\ \mathbf{D}\ \mathbf{\Phi}$$

Bases

Base modale de Chebyshev

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{p} \underline{u}_j(t)\phi_j(x_i)$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\underline{\mathbf{u}}$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}}$$

- Base

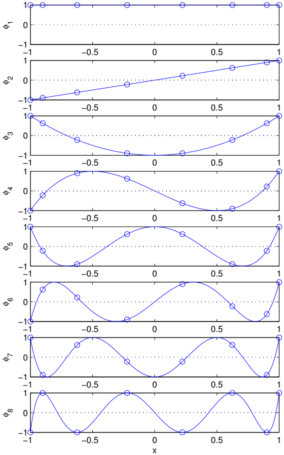
$$\phi_1(x) = 1,\ \phi_2(x) = x$$
$$\phi_{j+1}(x) = 2x\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)$$

- Noeuds de collocation

$$\mathbb{X} = \{\mathrm{x}_i | x + \cos(\frac{\pi(i-1)}{\mathrm{p}-1}) = 0\},\ i = 1, \ldots, \mathrm{p}$$

- Conséquence

$$\mathbf{\Phi} \neq \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} \neq \underline{\mathbf{u}}$$



Opérateurs de dérivation

Dérivée première - schéma centré

- Série de Taylor

$$\mathrm{u}_{i+1} = \mathrm{u}_i + \frac{h}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)$$

$$\mathrm{u}_{i-1} = \mathrm{u}_i - \frac{h}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)$$

- Différence des deux séries

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h} \underbrace{- \frac{h^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)}_{\epsilon = \mathcal{O}(h^2)}$$

- Approximation du second ordre

Opérateurs de dérivation

$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{D}\mathbf{u}$

Dérivée première - formulations matricielles

- Schéma progressif

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_i}{h} \pm \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{D}^+ = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & +1 & & & \\ & -1 & +1 & & \\ & & -1 & +1 & \\ & & & -1 & +1 \\ & & & & ? \end{pmatrix}$$

- Schéma rétrograde

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_{i-1}}{h} \pm \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{D}^- = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} ? & & & & \\ -1 & +1 & & & \\ & -1 & +1 & & \\ & & -1 & +1 & \\ & & & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

- Schéma centré

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h} \pm \mathcal{O}(h^2) \qquad \mathbf{D}^\circ = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} ? & ? & & & \\ -1 & 0 & +1 & & \\ & -1 & 0 & +1 & \\ & & -1 & 0 & +1 \\ & & & ? & ? \end{pmatrix}$$

Opérateurs de dérivation

$u(x,t) \simeq \sum_{n=0}^{\mathrm{r}-1} \frac{(x-\mathrm{x}_i)^n}{n!} \left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{x=\mathrm{x}_i}$

Méthode générale

- Pour approximer une dérivée d'ordre n,
- avec un support[1] de r points,
- il faut satisfaire

$$\mathrm{r} > n$$

- et utiliser r développements de Taylor à r termes.

[1] en anglais *stencil*

Opérateurs de dérivation

Méthode générale

- Ordre de dérivation maximal calculable

$$\mathrm{n}_{\max} = \mathrm{r} - 1$$

- Ordre de précision pour la dérivée d'ordre n (schéma non-centré)

$$\epsilon = \mathcal{O}(h^{\mathrm{r}-n})$$

- Ordre de précision pour la dérivée d'ordre n (schéma centré)

$$\epsilon = \mathcal{O}(h^{\mathrm{r}-n+1}), \quad n \text{ pair}$$
$$\epsilon = \mathcal{O}(h^{\mathrm{r}-n}), \quad n \text{ impair}$$

Différences finies compactes

Approximation

Différences finies classiques. L'augmentation de l'ordre est uniquement obtenue par agrandissement du stencil. La dérivation est toujours explicite

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{D}\mathbf{u}^{(0)}$$

Différences finies compactes. L'augmentation de l'ordre est obtenue par agrandissement du stencil et par dérivation implicite

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^{(0)}$$

Il faut donc résoudre un système d'équations linéaires pour appliquer une dérivée ou calculer la matrice de dérivation

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

Différences finies compactes

Schéma du 6e ordre

On note la dérivée n-ième de u par rapport à x, évaluée au noeud i et au pas de temps k

$$\mathrm{u}_i^{(n)} = \left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}_k}$$

et on considère une approximation aux différences finies compactes de la forme

$$\alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + \mathrm{u}_i^{(1)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(\mathrm{u}_{i+2}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-2}^{(0)})$$

- Etant donné que le stencil est centré et de 5 points, le schéma aux différences finies classiques correspondant ($\alpha = 0$) est d'ordre 4.
- Le schéma compacte ($\alpha \neq 0$) n'est utile que s'il conduit à une approximation qui est au moins d'ordre 5.

DFC

$$\alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + \mathrm{u}_i^{(1)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(\mathrm{u}_{i+2}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-2}^{(0)})$$

6e ordre

L'erreur de troncature liée à cette approximation s'écrit

$$\tau = \alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + \mathrm{u}_i^{(1)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(1)} - \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(\mathrm{u}_{i+2}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-2}^{(0)})$$

On développe tous les termes en série de Taylor pour les exprimer en fonction des grandeurs au noeud i,

$$\mathrm{u}_{i\pm1}^{(0)} = +\mathrm{u}_i^{(0)} \pm (1h)\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{(1h)^2}{2!}\mathrm{u}_i^{(2)} \pm \frac{(1h)^3}{3!}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{(1h)^4}{4!}\mathrm{u}_i^{(4)} \pm \frac{(1h)^5}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)} \pm \mathcal{O}(h^6)$$

$$\mathrm{u}_{i\pm1}^{(1)} = +\mathrm{u}_i^{(1)} \pm (1h)\mathrm{u}_i^{(2)} + \frac{(1h)^2}{2!}\mathrm{u}_i^{(3)} \pm \frac{(1h)^3}{3!}\mathrm{u}_i^{(4)} + \frac{(1h)^4}{4!}\mathrm{u}_i^{(5)} \pm \mathcal{O}(h^5)$$

$$\mathrm{u}_{i\pm2}^{(0)} = +\mathrm{u}_i^{(0)} \pm (2h)\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2!}\mathrm{u}_i^{(2)} \pm \frac{(2h)^3}{3!}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{(2h)^4}{4!}\mathrm{u}_i^{(4)} \pm \frac{(2h)^5}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)} \pm \mathcal{O}(h^6)$$

DFC

$$\alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + \mathrm{u}_i^{(1)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(\mathrm{u}_{i+2}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-2}^{(0)})$$

6e ordre

Par substitution dans l'erreur de troncature, on trouve

$$\tau = (2\alpha+1)\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{\alpha h^2}{2}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{\alpha h^4}{12}\mathrm{u}_i^{(5)}$$
$$-\beta\left(\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{h^2}{12}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{h^4}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)}\right) - \gamma\left(\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{h^2}{3}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{2h^4}{15}\mathrm{u}_i^{(5)}\right) \pm \mathcal{O}(h^6)$$

Pour obtenir un schéma d'ordre 5, il faut annuler les termes d'ordre 0, d'ordre 2 et d'ordre 4. On obtient donc le système d'équations

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= -1 \\ 6\alpha - \beta - 4\gamma &= 0 \\ 10\alpha - \beta - 16\gamma &= 0 \end{aligned}$$

DFC

6e ordre

$$\alpha u_{i+1}^{(1)} + u_i^{(1)} + \alpha u_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(u_{i+1}^{(0)} - u_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(u_{i+2}^{(0)} - u_{i-2}^{(0)})$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^{(0)}$$

La solution de ce système permet d'obtenir les coefficients

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{9}\,(3, 14, 1)}$$

- Le schéma du sixième ordre est donc obtenu par substition de ces coefficents dans la définition.
- La dérivation implicite permet ainsi de passer de l'ordre 4 à l'ordre 6.
- Des schémas compactes d'ordre supérieur sont obtenus par agrandissement du stencil.

DFC

6e ordre

$$\alpha u_{i+1}^{(1)} + u_i^{(1)} + \alpha u_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(u_{i+1}^{(0)} - u_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(u_{i+2}^{(0)} - u_{i-2}^{(0)})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{u}^{(0)}$$

Cette approximation peut s'exprimer sous forme matricielle avec les matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ données par

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} ? & ? & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\beta}{2h} \begin{pmatrix} ? & ? & & & \\ -1 & 0 & +1 & & \\ & -1 & 0 & +1 & \\ & & -1 & 0 & +1 \\ & & & ? & ? \end{pmatrix} + \frac{\gamma}{4h} \begin{pmatrix} ? & ? & ? & & \\ ? & ? & ? & ? & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ & ? & ? & ? & ? \\ & & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Comme ces schémas ne sont pas définis au bord, il faut les substituer par un schéma aux différences finies classiques et décentrés tout en conservant l'ordre de l'approximation.

DFC

$$\alpha u_{i+1}^{(1)} + u_i^{(1)} + \alpha u_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(u_{i+1}^{(0)} - u_{i-1}^{(0)}) + \frac{\gamma}{4h}(u_{i+2}^{(0)} - u_{i-2}^{(0)})$$

6e ordre

Si on a des conditions aux limites périodiques, le schéma est défini partout et on a les matrices circulaires

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\beta}{2h}\begin{pmatrix} 0 & +1 & & & -1 \\ -1 & 0 & +1 & & \\ & -1 & 0 & +1 & \\ & & -1 & 0 & +1 \\ +1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\gamma}{4h}\begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappele que la dérivée est obtenue de manière implicite par résolution du système d'équations

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^{(0)}$$

ou en calculant explicitement la matrice de dérivation

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

DFC

6e ordre

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

Dans le cas d'un maillage de 5 points avec conditions aux limites périodiques, la matrice de dérivation s'écrit

$$\mathbf{D} = \frac{\beta}{(\alpha^2+\alpha-1)}\begin{pmatrix} 0 & +(\alpha-1) & +\alpha & -\alpha & -(\alpha-1) \\ -(\alpha-1) & 0 & +(\alpha-1) & +\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -(\alpha-1) & 0 & +(\alpha-1) & +\alpha \\ +\alpha & -\alpha & -(\alpha-1) & 0 & +(\alpha-1) \\ +(\alpha-1) & +\alpha & -\alpha & -(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\gamma}{(\alpha^2+\alpha-1)}\begin{pmatrix} 0 & +\alpha & -1 & +1 & -\alpha \\ -\alpha & 0 & +\alpha & -1 & +1 \\ +1 & -\alpha & 0 & +\alpha & -1 \\ -1 & +1 & -\alpha & 0 & +\alpha \\ +\alpha & -1 & +1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Références

- *Numerical approximation of partial differential equations*, A. Quarteroni and A. Valli, Springer, 1997