

Solutions X

1 Linéarisation

Première méthode. En utilisant l'inconnue $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, p)^T$, les équations de Navier–Stokes peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\partial_t(\mathbf{M}\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

où les définitions suivantes ont été utilisées

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \text{Re } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

De manière à établir les équations linéarisées autour d'une solution d'équilibre $\bar{\mathbf{u}}$, on considère la solution d'équilibre perturbée

$$\mathbf{u} = \underbrace{\bar{\mathbf{u}}}_{\text{équilibre}} + \underbrace{\epsilon \mathbf{u}'}_{\text{perturbation}}, \quad \epsilon \ll 1. \quad (3)$$

Par un développement limité au premier ordre, on obtient

$$\partial_t(\mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}) + \partial_t(\epsilon \mathbf{M}\mathbf{u}') + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{u}}} (\epsilon \mathbf{u}') = \mathbf{f}. \quad (4)$$

Etant donné que l'équilibre $\bar{\mathbf{u}}$ est solution des équations de départ, l'évolution de la perturbation est gouvernée par l'équation linéarisée

$$\underbrace{\partial_t(\mathbf{M}\mathbf{u}') + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}')}_{\mathbf{L}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}')} = 0. \quad (5)$$

L'opérateur spatial linéarisé autour de l'équilibre $\bar{\mathbf{u}}$ appliqué à \mathbf{u}' s'écrit

$$\mathbf{L}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}') = \overbrace{\begin{pmatrix} \text{Re } (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla + \nabla \bar{\mathbf{v}}) - \nabla^2 & \nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix}}^{= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} |_{\bar{\mathbf{u}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ p' \end{pmatrix}}_{= \mathbf{u}'} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Re } (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) - \nabla^2 \mathbf{v}' + \nabla p' \\ \nabla \cdot \mathbf{v}' \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Nous pouvons ainsi établir les équations de Navier–Stokes linéarisées

$$\partial_t \mathbf{v}' + \text{Re } (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{v}', \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (9)$$

qui ne dépendent pas de l'équilibre en pression puisque les équations de Navier–Stokes sont linéaires par rapport à cette variable.

Seconde méthode. De manière équivalente à l'équation (3), on considère la solution d'équilibre perturbée explicitement formulée pour chaque variable

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{v}', \quad (10)$$

$$p = \bar{p} + \epsilon p', \quad (11)$$

que l'on remplace directement dans les équations de Navier–Stokes pour obtenir

$$\partial_t(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{v}') + \text{Re} (\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{v}') \cdot \nabla(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{v}') = -\nabla(\bar{p} + \epsilon p') + \nabla^2(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') + \mathbf{g}, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{v}') = 0. \quad (13)$$

En tenant compte du fait que l'équilibre est solution des équations, en négligeant les termes d'ordre ϵ^2 , et par linéarité des opérations de dérivation, les équations précédentes se simplifient sous la forme

$$\partial_t \mathbf{v}' + \text{Re} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{v}', \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (15)$$

qui est strictement équivalente aux équations (8)-(9).

2 Systèmes d'équations

- Etant donné que l'équation des ondes comporte une dérivée temporelle seconde de la variable u , nous la réécrivons sous la forme d'un système de deux équations comportant chacune une dérivée temporelle première. En introduisant la nouvelle variable v définie comme la dérivée temporelle de la variable u , nous obtenons le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

- Avec la méthode des volumes finis, le domaine de calcul Ω est subdivisé en sous-domaines Ω_i appelés volumes finis. A chaque volume fini est associé un noeud i , placé au centre et dont la coordonnée vaut x_i . La valeur de la solution numérique constante sur chaque volume fini est notée u_i . A chaque volume fini Ω_i sont également associées des fonctions test valant 1 sur le volume fini Ω_i auquel elles sont rattachées et 0 en dehors.

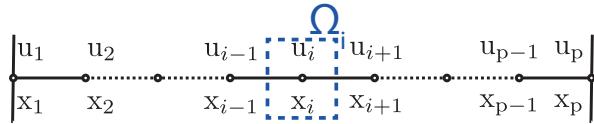


Figure 1: Méthode des volumes finis, définitions.

Nous admettrons que tous les volumes finis ont une longueur h et une surface latérale S arbitraire puisque nous considérons un problème mono-dimensionnel.

La première étape de la discréttisation est la dérivation de la formulation faible qui s'obtient en premier lieu par le produit scalaire avec les fonctions test ϕ et ψ ,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \cdot \phi \, dV = 0, & \forall \phi \in L^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot \psi \, dV = 0, & \forall \psi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (16)$$

Puis nous intégrons par parties le terme qui comporte une dérivée seconde en espace

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \cdot \phi \, dV = 0, \quad \forall \phi \in L^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \psi + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dV - \int_{\partial\Omega} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \psi \, n \, dS = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (17)$$

faisant ainsi apparaître le terme de flux. Par additivité de l'intégration, cette formulation est équivalente à la somme sur les p volumes finis qui subdivisent le domaine Ω

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \cdot \underbrace{\phi_i}_{=1} \, dV_i = 0, \quad \forall \phi_i \in L^2(\Omega_i), \\ \sum_{i=1}^p \int_{\Omega_i} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \underbrace{\psi_i}_{=1} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial \psi_i}{\partial x}}_{=0} \, dV_i - \sum_{i=1}^p \int_{\partial\Omega_i} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{\psi_i}_{=1} \, n \, dS_i = 0, \quad \forall \psi_i \in H^1(\Omega_i). \end{cases} \quad (18)$$

Après simplification, nous obtenons la relation suivante qui doit être vérifiée sur chaque volume fini

$$\begin{cases} \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v \right) \, dV_i = 0, \quad \forall i, \\ \int_{\Omega_i} \frac{\partial v}{\partial t} \, dV_i - \int_{\partial\Omega_i} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \, n \, dS_i = 0, \quad \forall i. \end{cases} \quad (19)$$

Comme proposé dans la donnée, nous utilisons un schéma aux différences finies centré du second ordre permettant d'obtenir les dérivées premières aux bord des volumes finis à partir des valeurs nodales adjacentes. On obtient ainsi le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} (\dot{u}_i - v_i)hS = 0, \quad \forall i, \\ \dot{v}_i hS - c^2 \left(-\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) S = 0, \quad \forall i, \end{cases} \quad (20)$$

qui peut s'écrire après simplification sous la forme

$$\begin{cases} \dot{u}_i - v_i = 0, \quad \forall i, \\ \dot{v}_i - c^2 \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) = 0, \quad \forall i. \end{cases} \quad (21)$$

Sous forme matricielle, ceci s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

où apparaissent la matrice identité \mathbf{I} et la matrice

$$\mathbf{A} = -\frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (23)$$

3. En utilisant la méthode theta pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires, nous obtenons le système algébrique suivant

$$\begin{pmatrix} +\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} & -\theta\mathbf{I} \\ +\theta\mathbf{A} & +\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} +\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} & -(\theta-1)\mathbf{I} \\ +(1-\theta)\mathbf{A} & +\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (24)$$

à résoudre à chaque pas de temps pour l'intégration temporelle à partir de conditions initiales données.