METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 11 mai 2017

Solutions XI

1 Différences finies compactes

1. En posant $\alpha = 0$, l'approximation aux différences finies compactes se réduit à

$$\mathrm{u}_i^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}). \tag{1}$$

De manière à déterminer l'ordre de cette approximation, on développe chacun des termes du membre de droite en série de Taylor

$$\mathrm{u}_{i\pm1}^{(0)} = +\mathrm{u}_i^{(0)} \pm h\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{h^2}{2!}\mathrm{u}_i^{(2)} \pm \frac{h^3}{3!}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{h^4}{4!}\mathrm{u}_i^{(4)} \pm \frac{h^5}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)} \pm \mathcal{O}(h^6), \tag{2}$$

série qui est interrompue au cinquième ordre puisque $u \in C^5(\mathbb{R})$. Par substitution dans la relation (1), on trouve l'erreur d'approximation

$$\tau = \mathrm{u}_i^{(1)} - \beta \left(\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{h^2}{3!}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{h^4}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)}\right) \pm \mathcal{O}(h^6). \tag{3}$$

Pour que l'approximation soit du second ordre, il faut annuler les termes d'ordre zéro. On a donc

$$\beta = 1, \tag{4}$$

et on retrouve ainsi l'approximation classique aux différences finies centrée du second ordre

$$\boxed{\mathrm{u}_i^{(1)} = \frac{\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}}{2h} \pm \mathcal{O}(h^2).} \tag{5}$$

2. Pour déterminer l'erreur d'approximation dans le cas général, on développe les dérivées premières en série de Taylor

$$\mathrm{u}_{i\pm1}^{(1)} = +\mathrm{u}_i^{(1)} \pm h\mathrm{u}_i^{(2)} + \frac{h^2}{2!}\mathrm{u}_i^{(3)} \pm \frac{h^3}{3!}\mathrm{u}_i^{(4)} + \frac{h^4}{4!}\mathrm{u}_i^{(5)} \pm \mathcal{O}(h^5). \tag{6}$$

Par substitution des relations (2) et (6) dans l'approximation aux différences finies compactes, on trouve

$$\tau = (2\alpha + 1)\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{\alpha h^2}{2}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{\alpha h^4}{12}\mathrm{u}_i^{(5)} - \beta \left(\mathrm{u}_i^{(1)} + \frac{h^2}{12}\mathrm{u}_i^{(3)} + \frac{h^4}{5!}\mathrm{u}_i^{(5)}\right) \pm \mathcal{O}(h^6). \tag{7}$$

3. Pour que l'approximation soit du quatrième ordre, il faut annuler les termes d'ordre zéro et d'ordre deux. On obtient ainsi le système d'équations

$$2\alpha - \beta = -1, \tag{8}$$
$$3!\alpha - \beta = 0, \tag{9}$$

dont la solution est donnée par

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right). \tag{10}$$

On obtient ainsi l'approximation aux différences finies compactes du quatrième ordre

$$\boxed{\frac{1}{4}(\mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + 4\mathrm{u}_i^{(1)} + \mathrm{u}_{i-1}^{(1)}) = \frac{3}{4h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}) \pm \mathcal{O}(h^4).} \tag{11}$$

4. L'avantage de ce schéma compact (implicite) est qu'on obtient une approximation du quatrième ordre avec un support de trois points. Il faudrait un support de cinq points pour obtenir le même ordre avec une approche classique (explicite). Le désavantage est que les dérivées nodales ne peuvent pas être obtenues de manière explicite. Il faut donc établir et résoudre un système d'équations linéaires de la forme

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^{(0)} \tag{12}$$

pour les déterminer. Il est également possible de dériver explicitement la matrice de dérivation $\mathbf{D}_{,x} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$ moyennant le calcul d'une matrice inverse.