METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 11 mai 2017

Exercices XI

1 Différences finies compactes

Soit une fonction u qui dépende de l'espace x et du temps t définie par

$$\begin{array}{llll} u: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,t) & \rightarrow & u(x,t). \end{array}$$

On suppose que la fonction $u \in C^5$, $\forall t$, c'est-à-dire que seulement ses cinq premières dérivées soient continues. On note sa dérivée n-ième par rapport à x, évaluée au noeud i et au pas de temps k

$$\mathrm{u}_i^{(n)} = \left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}_k},$$

et on considère l'approximation aux différences finies compactes

$$\alpha \mathrm{u}_{i+1}^{(1)} + \mathrm{u}_i^{(1)} + \alpha \mathrm{u}_{i-1}^{(1)} \simeq \frac{\beta}{2h}(\mathrm{u}_{i+1}^{(0)} - \mathrm{u}_{i-1}^{(0)}), \tag{1}$$

avec le pas de discrétisation

$$h = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_{i-1}, \quad \forall i.$$

1. En posant $\alpha = 0$, déterminer le coefficient β pour que l'approximation (1) soit du second ordre en h.
2. En développant tous les termes de la relation (1) en série de Taylor, déterminer l'erreur d'approximation dans le cas général.
3. Etablir un système d'équations pour les coefficients α et β de manière à ce que l'approximation (1) soit du quatrième ordre en h, puis déterminer ces coefficients.
4. Pourquoi le schéma trouvé au point 3 est-il qualifié de compact? Discuter ses avantages et ses inconvénients par rapport au schéma établi au point 1 avec $\alpha = 0$.