Méthodes de discrétisation en fluides

11. Equations de Stokes instationnaires

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 23 mai 2024

Contenu

Equations de Navier–Stokes

Formulations adimensionnelles

- Temps d'advection $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$,

$$\partial_{\hat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \mathrm{Re}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

- Temps de diffusion $\mathrm{T} = \frac{\rho \mathrm{L}^2}{\mu}$,

$$\partial_{\hat{t}}\widehat{\boldsymbol{v}} + \mathrm{Re}\, \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{\boldsymbol{v}} = -\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \widehat{\boldsymbol{\nabla}}^2\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{g}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \widehat{\boldsymbol{v}} = 0$$

où le nombre de Reynolds $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{V}\mathrm{L}}{\mu}}$

Equations de Navier–Stokes

Limite de Stokes

A la limite $\mathrm{Re} \to 0$, on peut négliger le terme d'advection. On obtient ainsi les équations de Stokes

$$\rho\, \partial_t \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

ce qui s'écrit explicitement sous la forme

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \rho g_x$$
$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \rho g_y$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Discrétisation spatiale

Sous forme semi-discrète, ces équations deviennent formellement

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{A}\mathbf{v}_x &= -\mathbf{D}_x\mathbf{p} + \mathbf{M}\mathbf{g}_x \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_y + \mathbf{A}\mathbf{v}_y &= -\mathbf{D}_y\mathbf{p} + \mathbf{M}\mathbf{g}_y \\ \mathbf{D}_x\mathbf{v}_x + \mathbf{D}_y\mathbf{v}_y &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

De manière équivalente, on peut écrire ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_x \\ \dot{\mathbf{v}}_y \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{D}_y \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{g}_x \\ \mathbf{M}\mathbf{g}_y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Discrétisation spatiale

Puis, en définissant l'opérateur divergence $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_x \ \mathbf{D}_y)$, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mg} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x \ \mathbf{v}_y)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_x \ \mathbf{g}_y)^{\mathrm{T}}$ et le gradient $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$

- La matrice de masse du système complet est singulière
- Système d'équations différentielles ordinaires pour la vitesse
- Système d'équations algébriques pour la pression

Discrétisation temporelle

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{M}\mathbf{g}$$
$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{g}$$

Méthode-θ

En ne considérant pas la pression, les équations de quantité de mouvement semi-discrètes s'écrivent

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$$

Avec la méthode-theta

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} \approx \frac{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} - \mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = (1-\theta)\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{v}}^{(n)}) + \theta\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)})$$

Disc. temp.

$$\frac{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)}-\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^{(n)}}{\Delta\mathrm{t}} = (1-\theta)\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{v}}^{(n)}) + \theta\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)})$$

Méthode-θ

on obtient les équations discrètes suivantes

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{v}}^{(n)} + (1-\theta)\mathbf{M}\mathbf{g}^{(n)} + \theta\mathbf{M}\mathbf{g}^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)}$$

où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta\mathrm{t}} + \theta\mathbf{A}$$
$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta\mathrm{t}} + (\theta-1)\mathbf{A}$$

Disc. temp.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Mg} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Méthode-θ

En incorporant la contrainte d'incompressiblilité ainsi que la pression correspondante au temps $n+1$, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

où le second membre est donné par

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{v}}^{(n)} + (1-\theta)\mathbf{Mg}^{(n)} + \theta\mathbf{Mg}^{(n+1)}$$

Découplage vitesse-pression

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)}$$
$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} = \mathbf{0}$$

Méthode directe d'Uzawa

En multipliant les équations de quantité de mouvement discrètes par $\mathbf{DH}^{-1}$, on obtient une équation pour la pression

$$\underbrace{\mathbf{D}\overbrace{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}}^{=\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{DH}^{-1}\mathbf{G}}_{\equiv \mathbf{U}}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} = \mathbf{D}\underbrace{\mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)}}_{\equiv \tilde{\mathbf{v}}^*}$$

On peut écrire ces équations sous la forme triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

Méthode directe d'Uzawa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

La substitution inverse pour ce système donne la méthode d'Uzawa

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{*} &= \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} \\ \mathbf{U}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} &= \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}^{*} \\ \mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} &= \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \end{aligned}$$

avec l'opérateur d'Uzawa donné par

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}}$$

- Méthode trop couteuse car elle requiert le calcul de $\mathbf{H}^{-1}$
- Méthode non utilisée en pratique mais qui sert à la compréhension d'autres méthodes

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

Méthodes d'approximation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

De manière générale, on introduit une approximation du découplage vitesse-pression en multipliant le gradient de pression par la quantité $\mathbf{HQ}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HQG} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

avec l'erreur de découplage

$$\tilde{\mathbf{s}}^{(n+1)} = (\mathbf{HQ} - \mathbf{I})\mathbf{G}\mathbf{p}^{(n+1)}$$

Si $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{-1}$ l'erreur de découplage est nulle et on récupère la méthode d'Uzawa. On cherche donc une approximation telle que

$$\boxed{\mathbf{Q} \simeq \mathbf{H}^{-1}}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} + \mathbf{HQG}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(n+1)}$$

Méthodes d'approximation

En omettant pour le moment l'erreur de découplage $\tilde{\mathbf{s}}^{(n+1)}$, l'équation pour la pression devient

$$\underbrace{\mathbf{D}\,\overbrace{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}}^{=\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{D}\,\overbrace{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}}^{=\mathbf{I}}\,\mathbf{QG}}_{\equiv\tilde{\mathbf{U}}}\,\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} = \mathbf{D}\,\underbrace{\mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)}}_{\equiv\tilde{\mathbf{v}}^{*}}$$

On peut écrire ces équations sous la forme triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HQG} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{U}} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

Méthodes d'approximation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{QG} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{U}} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

La substitution inverse pour ce système donne l'algorithme en trois étapes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{v}}^{*} &= \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} &= \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}^{*} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} &= \tilde{\mathbf{v}}^{*} - \mathbf{QG}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \end{aligned}$$

où on a ajouté la troisième équation à la première qu'on a ensuite multiplié par $\mathbf{H}^{-1}$. Dans ce cas, l'opérateur d'Uzawa approché est donné par

$$\boxed{\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{DQG}}$$

Découplage vitesse-pression

$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \theta \mathbf{A}$

Méthodes d'approximation

La matrice de la méthode-theta peut s'écrire

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} \underbrace{- \mathbf{K}}_{\equiv +\theta \mathbf{A}} = (\mathbf{I} - \Delta \mathrm{t} \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}}_{\equiv \mathbf{X}}) \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Ainsi, son inverse devient

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1} &= \Delta \mathrm{t} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I} - \Delta \mathrm{t} \mathbf{X})^{-1} \\ &= \Delta \mathrm{t} \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta \mathrm{t} \mathbf{X})^{k-1} \end{aligned}$$

où la série de Taylor est convergente à condition que le rayon spectral

$$\boxed{\rho(\Delta \mathrm{t} \mathbf{X}) < 1}$$

Découplage vitesse-pression

$$\mathbf{K} = -\theta\mathbf{A}$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}$$

Méthodes d'approximation

On définit une approximation de l'inverse de $\mathbf{H}$ en tronquant la série à l'ordre r

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\mathrm{r}} &= \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}(\Delta\mathrm{t}\mathbf{X})^{k-1} \\
&= \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}(-\Delta\mathrm{t}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})^{k-1}
\end{aligned}$$

Aux premiers ordres, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 &= \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1} \\
\mathbf{Q}_2 &= \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1} - \Delta\mathrm{t}^2\mathbf{M}^{-1}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \\
\mathbf{Q}_3 &= \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1} - \Delta\mathrm{t}^2\mathbf{M}^{-1}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} + \Delta\mathrm{t}^3\mathbf{M}^{-1}(\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})^2
\end{aligned}$$

Découplage vitesse-pression

Méthodes d'approximation

$$\mathbf{K} = -\theta\mathbf{A}$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}$$

L'ordre de précision de l'approximation est

$$\mathbf{H}^{-1} = \overbrace{\Delta \mathrm{t}\mathbf{M}^{-1}}^{=\mathbf{Q}_1} \pm \mathcal{O}(\theta^1\Delta\mathrm{t}^2)$$
$$\mathbf{H}^{-1} = \Delta \mathrm{t}\mathbf{M}^{-1} - \Delta\mathrm{t}^2\mathbf{M}^{-1}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \pm \mathcal{O}(\theta^2\Delta\mathrm{t}^3)$$
$$\mathbf{H}^{-1} = \underbrace{\Delta \mathrm{t}\mathbf{M}^{-1} - \Delta\mathrm{t}^2\mathbf{M}^{-1}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} + \Delta\mathrm{t}^3\mathbf{M}^{-1}(\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})^2}_{=\mathbf{Q}_3} \pm \mathcal{O}(\theta^3\Delta\mathrm{t}^4)$$

De manière générale, on a

$$\boxed{\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{Q}_\mathrm{r} \pm \mathcal{O}(\theta^\mathrm{r}\Delta\mathrm{t}^{\mathrm{r}+1})}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HQG} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

Méthodes d'approximation

L'erreur de découplage est donnée par

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} = (\mathbf{HQ}_{\mathrm{r}} - \mathbf{I})\mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)}$$

Aux premiers ordres, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_1^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^1 \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \approx \mathcal{O}(\theta\Delta \mathrm{t})^1 \\ \tilde{\mathbf{s}}_2^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^2 \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \approx \mathcal{O}(\theta\Delta \mathrm{t})^2 \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{r}} \mathbf{G}\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} \approx \mathcal{O}(\theta\Delta \mathrm{t})^{\mathrm{r}} \end{aligned}$$

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} = (\mathbf{H}\mathbf{Q}_{\mathrm{r}} - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} = \mathcal{O}(\theta\Delta\mathrm{t})^{\mathrm{r}}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{r}} = \Delta\mathrm{t}\mathbf{M}^{-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}(-\Delta\mathrm{t}\theta\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})^{k-1}$$

Méthodes d'approximation

$$\boxed{\tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} \approx \mathcal{O}(\theta\Delta\mathrm{t})^{\mathrm{r}}}$$

- L'ordre de l'approximation doit être compatible avec l'ordre de la méthode d'intégration temporelle
- Si la matrice de masse est facile à inverser, ces méthodes peuvent être très efficaces
- L'erreur de découplage est non-nulle pour des solutions stationnaires
- Les solutions stationnaires éventuellement atteintes par intégration temporelle peuvent dépendre du pas de temps

Découplage $\boldsymbol{v}$-p

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HQG} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^{(n+1)}$$

Correction de pression

En considérant la correction de pression comme nouvelle inconnue

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{HQG} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(n+1)} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}^{(n+1)} + \tilde{\mathbf{s}}^{(n+1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

on garantit que l'erreur de découplage soit nulle pour une solution stationnaire puisque

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} = (\mathbf{HQ}_{\mathrm{r}} - \mathbf{I})\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)})$$

Découplage vitesse-pression

Méthodes d'approximation avec correction de pression

Etant donné que

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)} = \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}),$$

l'ordre temporel est augmenté d'une unité. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{s}}_1^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^1 \mathbf{G} \overbrace{(\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)})}^{= \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t})} \approx \mathcal{O}(\theta^1 \Delta \mathrm{t}^{1+1}) \\
\tilde{\mathbf{s}}_2^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^2 \mathbf{G} (\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)}) \approx \mathcal{O}(\theta^2 \Delta \mathrm{t}^{2+1}) \\
&\vdots \\
\tilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{r}}^{(n+1)} &= (\theta \Delta \mathrm{t} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{r}} \mathbf{G} (\tilde{\mathbf{p}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{p}}^{(n)}) \approx \mathcal{O}(\theta^{\mathrm{r}} \Delta \mathrm{t}^{\mathrm{r}+1})
\end{aligned}$$

Références

- *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund, Cambridge University Press, 2002
- *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 1999
- *Eléments finis pour les fluides incompressibles*, M. Azaiez, M. Deville, E. Mund, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2011