Solutions VI

1 Equation d'advection instationnaire

1.1 Analyse de stabilité linéaire continue

Pour déterminer le caractère d'une solution d'équilibre de l'équation d'advection, on calcule tout d'abord l'opérateur spatial linéarisé

$$L(\overline{u}, u') = \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_{\overline{u}} (u') = \mathrm{c}\ \partial_x u'. \tag{1}$$

Dans ce cas particulier, il est égal à l'opérateur spatial puisque ce dernier est linéaire. L'équation d'évolution de la perturbation s'écrit donc

$$\partial_t u' + \mathrm{c}\ \partial_x u' = 0. \tag{2}$$

Avec une solution de la forme $u'(x,t) = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x-\omega t)}$, on obtient la relation de dispersion classique

$$\omega = \mathrm{ck}. \tag{3}$$

Etant donné que

$$\mathrm{Im}(\omega) = 0, \quad \forall \mathrm{k}, \tag{4}$$

toute solution d'équilibre est neutre, c'est-à-dire que toute perturbation n'est ni amplifiée, ni atténuée, mais seulement advectée.

1.2 Analyse de stabilité linéaire discrète

Pour effectuer une analyse de stabilité linéaire discrète, on doit résoudre le problème aux valeurs propres généralisé

$$\tilde{\lambda}^{(k)} \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

avec la matrice de masse $\mathbf{M}$ et la matrice de discrétisation de l'opérateur spatial linéarisé $\mathbf{L}$. Etant donné que la matrice de masse est identité (méthode de colocation), il se réduit à un problème aux valeurs propres standard

$$\mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} = -\tilde{\lambda}^{(k)} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}, \tag{6}$$

où $\mathbf{L}$ dépend du schéma de discrétisation spatiale utilisé.

1. Si on utilise un schéma aux différences finies centré du second ordre, la matrice de discrétisation de l'opérateur spatial linéarisé est donnée par

$$\mathbf{L}^{\circ} = \frac{\mathrm{c}}{2h} \begin{pmatrix} 0 & +1 & & & -1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 0 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ +1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

La matrice $\mathbf{L}^{\text{o}}$ étant circulaire, tridiagonale et anti-symétrique, on trouve facilement que

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = -\frac{\mathrm{ic}}{h}\sin(\psi_k) \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}(\tilde{\lambda}^{(k)}) = 0,\ \forall(\mathrm{c}, h). \tag{8}$$

La neutralité des solutions d'équilibre est donc préservée quel que soit le pas de discrétisation. Le schéma aux différences finies centré du second ordre est donc absolument consistant pour la discrétisation spatiale de l'équation d'advection.

2. Si on utilise un schéma aux différences finies Upwind du premier ordre, la matrice de discrétisation de l'opérateur spatial linéarisé est donnée par

$$\mathbf{L}^{-} = \frac{\mathrm{c}}{h}\begin{pmatrix} +1 & 0 & & & -1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & +1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbf{L}^{-}$ est circulaire et tridiagonale, on trouve que

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = \frac{\mathrm{c}}{h}\left(\cos(\psi_k) - 1 - \mathrm{i}\sin(\psi_k)\right), \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}(\tilde{\lambda}^{(k)}) < 0,\ \forall(\mathrm{c}, h).$$

La neutralité des solutions d'équilibre est donc perdue quel que soit le pas de discrétisation. Ceci est dû à la diffusion artificielle introduite par le schéma Upwind du premier ordre. Cette méthode est donc inconsistante pour la discrétisation spatiale de l'équation d'advection.

1.3 Analyse de stabilité numérique

Pour effectuer une analyse de stabilité numérique, on doit résoudre un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$\tilde{\gamma}^{(k)}\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{u}}^{(k)}. \tag{9}$$

Si on utilise la méthode-theta pour la discrétisation temporelle, les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta\mathbf{L}, \tag{10}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta - 1)\mathbf{L}. \tag{11}$$

Dans le cas particulier de la méthode d'Euler explicite ($\theta = 0$), et puisque la matrice de masse est identité, le problème aux valeurs propres généralisé (9) se simplifie sous la forme standard

$$\tilde{\gamma}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = (\mathbf{I} - \Delta \mathrm{t}\mathbf{L})\hat{\mathbf{u}}^{(k)}. \tag{12}$$

1. Si on utilise un schéma aux différences finies centré du second ordre, on trouve que

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = 1 - \mathrm{i}\,\underbrace{\frac{\mathrm{c}\Delta \mathrm{t}}{h}}_{=\,\mathrm{Co}}\,\sin(\psi_k), \tag{13}$$

avec la nombre de Courant Co qui exprime le rapport entre la vitesse d'advection c et la vitesse de propagation numérique $h/\Delta \mathrm{t}$. Pour conserver la neutralité des solutions d'équilibre au niveau discret, on doit imposer $|\tilde{\gamma}^{(k)}| = 1$, ce qui implique la restriction sur le pas de temps $\Delta \mathrm{t} = 0$. En d'autres termes, on devrait imposer

$$\boxed{\mathrm{Co} = 0,} \tag{14}$$

ce qui est bien évidemment impossible pour intégrer dans le temps. Le couplage d'un *schéma aux différences finies centré du second ordre* avec la méthode d'*Euler explicite* pour la discrétisation de l'*équation d'advection* est donc une méthode de discrétisation *inconsistante*.

2. Si on utilise un schéma aux différences finies Upwind du premier ordre, on trouve que les gains sont donnés par
$$\tilde{\gamma}^{(k)} = -\mathrm{Co}\left(\cos(\psi_k) - 1 - \mathrm{i}\sin(\psi_k)\right) - 1.$$
Pour conserver la neutralité des solutions d'équilibre au niveau discret, on a donc la restriction
$$\boxed{\mathrm{Co} = 1.}$$
Le couplage d'un *schéma aux différences finies Upwind du premier ordre* avec la méthode d'*Euler explicite* pour la discrétisation de l'*équation d'advection* est donc une méthode de discrétisation *conditionellement consistante.*