METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 28 mars 2024

Série VI

1 Equation d'advection instationnaire

On considère l'équation d'advection instationnaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{c}\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

avec le coefficient d'advection c, le terme de forçage f et des conditions aux limites périodiques.

1.1 Analyse de stabilité linéaire continue

Procéder à une analyse de stabilité linéaire continue et en déduire le caractère de toute solution d'équilibre.

1.2 Analyse de stabilité linéaire discrète

Procéder à une analyse de stabilité linéaire discrète en utilisant

1. un schéma aux différences finies centré du second ordre
2. un schéma Upwind du premier ordre

pour la discrétisation spatiale. Dans chaque cas, déterminer s'il existe une restriction sur le pas de discrétisation spatiale pour conserver le caractère des solutions d'équilibre. Le cas échéant, déterminer cette restriction.

1.3 Analyse de stabilité numérique

Procéder à une analyse de stabiliténumérique en utilisant la méthode d'Euler explicite et

1. un schéma aux différences finies centré du second ordre
2. un schéma Upwind du premier ordre

pour la discrétisation spatiale. Dans chaque cas, déterminer s'il existe une restriction sur les paramètres de discrétisation pour conserver le caractère des solutions d'équilibre. Le cas échéant, déterminer cette restriction.

Indication

Les valeurs propres d'une matrice circulaire et tridiagonale

$$\mathbf{A}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \gamma \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

sont données par

$$\sigma^{(k)} = \alpha + (\beta+\gamma)\cos(\psi_k) + \mathrm{i}(\beta-\gamma)\sin(\psi_k), \quad \psi_k = 2\pi\frac{k-1}{\mathrm{p}+1}$$

où p représente la taille du système d'équations.