Méthodes de discrétisation en fluides

6. Equation de diffusion instationnaire

Marc A. Habisreutinger

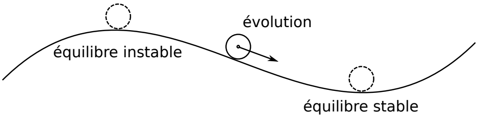
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 28 mars 2024

Contenu

Problèmes physiques

Bille sur des montagnes russes. . .



- Problème d'équilibre

  Quelles sont les positions d'équilibre de la bille?

- Problème d'évolution

  Pour des conditions initiales données, comment évolue la position de la bille dans le temps?

- Problème de stabilité

  Une petite perturbation de la position d'équilibre est-elle amplifiée ou amortie dans le temps?

Problèmes physiques

Phénomènes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP)

- un *problème d'équilibre*

  conduit, après discrétisation spatiale, à la solution d'un *système d'équations algébriques*

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$$

- un *problème d'évolution*

  conduit, après discrétisation spatiale, à la solution d'un *système d'équations différentielles ordinaires (EDO)*

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$$

- un *problème de stabilité*

  conduit, après discrétisation spatiale, à la solution d'un *problème aux valeurs propres (PVP)*

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{u}} = -\lambda\mathbf{M}\widehat{\mathbf{u}}$$

Equations différentielles ordinaires

Problème élémentaire

On considère le problème élémentaire

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{u}} = \lambda \mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{u}) \\ \mathrm{u}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{u}_0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est

$$\mathrm{u}(t) = \mathrm{u}_0 \exp(\lambda t)$$

Toute condition initiale s'atténue exponentiellement dans le temps si

$$\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) < 0}$$

Le problème est alors dit physiquement (ou mathématiquement) stable.

Equations différentielles ordinaires

Problème élémentaire

On peut définir le gain

$$\gamma = \frac{\mathrm{u}(\mathrm{t}^{(n+1)})}{\mathrm{u}(\mathrm{t}^{(n)})} = \frac{\mathrm{u}^{(n+1)}}{\mathrm{u}^{(n)}} = \mathrm{e}^{\lambda \Delta \mathrm{t}} = \mathrm{e}^{\mathrm{z}}$$

qui s'exprime aussi en série de Taylor sous la forme

$$\gamma = 1 + \frac{\mathrm{z}^1}{1!} + \frac{\mathrm{z}^2}{2!} + \frac{\mathrm{z}^3}{3!} + \mathcal{O}(\mathrm{z}^4)$$

On a ainsi les domaines de stabilité/neutralité/instabilité

$$\mathbb{S} = \{\, \mathrm{z} \mid \mathrm{abs}(\gamma) < 1 \,\} = \mathbb{C}^-$$
$$\mathbb{N} = \{\, \mathrm{z} \mid \mathrm{abs}(\gamma) = 1 \,\} = \mathbb{C}^0$$
$$\mathbb{I} = \{\, \mathrm{z} \mid \mathrm{abs}(\gamma) > 1 \,\} = \mathbb{C}^+$$

Eq. différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{u}} = \lambda \mathrm{u} = f(u) \\ \mathrm{u}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{u}_0 \end{cases}$$

Méthode d'Euler explicite

Pour la méthode d'Euler explicite, on utilise la série de Taylor progressive dans le temps

$$\mathrm{u}^{(n+1)} = \mathrm{u}^{(n)} + \frac{\Delta \mathrm{t}}{1!} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} + \frac{\Delta \mathrm{t}^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} + \frac{\Delta \mathrm{t}^3}{3!} \left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} \pm \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^4)$$

de manière à établir l'approximation progressive du premier ordre

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} = \frac{\mathrm{u}^{(n+1)} - \mathrm{u}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} \underbrace{- \frac{\Delta \mathrm{t}}{2!} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} \pm \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^2)}_{\propto \Delta \mathrm{t}}$$

Equations différentielles ordinaires

$$\gamma = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^4)$$

Méthode d'Euler explicite

Avec l'approximation progressive du premier ordre, on obtient

$$\dot{u}\big|_{t^{(n)}} = \lambda u^{(n)} \simeq \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\tilde{u}^{(n+1)} = (1 + \underbrace{\lambda \Delta t}_{= z})\tilde{u}^{(n)} = (1 + z)^{n+1} u^{(0)}$$

dont on déduit le gain approché

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{u}^{(n+1)}}{\tilde{u}^{(n)}} = 1 + z$$

Eq. différentielles ordinaires

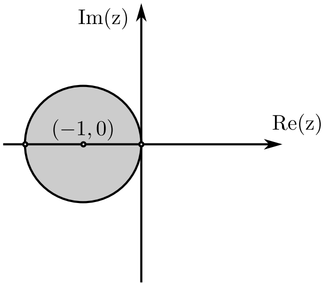
$\mathbb{S} = \{ \, z \mid \text{abs}(\gamma) < 1 \, \} = \mathbb{C}^-$

$z = \lambda \Delta t$

$\tilde{\gamma} = 1 + z$

Méthode d'Euler explicite

$$\tilde{\mathbb{S}} = \{ z \mid \text{abs}(\tilde{\gamma}) < 1 \} \neq \mathbb{C}^-$$



- Instabilité numérique pour des problèmes stables si z est hors du cercle unité centré en $(-1, 0)$
- Instabilité des problèmes instables conservée $\forall \Delta t$
- Problèmes neutres déstabilisés pour un pas de temps non nul

Equations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{u}} = \lambda \mathrm{u} = f(u) \\ \mathrm{u}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{u}_0 \end{cases}$$

Méthode d'Euler implicite

Pour la méthode d'Euler implicite, on utilise la série de Taylor rétrograde dans le temps

$$\mathrm{u}^{(n-1)} = \mathrm{u}^{(n)} - \frac{\Delta \mathrm{t}}{1!} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} + \frac{\Delta \mathrm{t}^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} - \frac{\Delta \mathrm{t}^3}{3!} \left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} \pm \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^4)$$

de manière à établir l'approximation rétrograde du premier ordre

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} = \frac{\mathrm{u}^{(n)} - \mathrm{u}^{(n-1)}}{\Delta \mathrm{t}} \underbrace{+ \frac{\Delta \mathrm{t}}{2!} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} \pm \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^2)}_{\propto \Delta \mathrm{t}}$$

Equations différentielles ordinaires

$\gamma = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}(z^4)$

Méthode d'Euler implicite

Avec l'approximation rétrograde du premier ordre, on obtient

$$\dot{u}\big|_{t^{(n+1)}} = \lambda u^{(n+1)} \simeq \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\tilde{u}^{(n+1)} = \frac{\tilde{u}^{(n)}}{1 - z} = \frac{u^{(0)}}{(1 - z)^{n+1}}$$

dont on déduit le gain approché

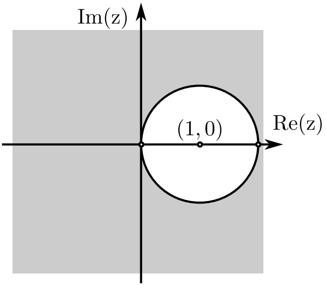
$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{1 - z} = 1 + z - z^2 + z^3 \pm \mathcal{O}(z^4)$$

Eq. différentielles ordinaires

$$\mathbb{S} = \{\ z \mid \text{abs}(\gamma) < 1\ \} = \mathbb{C}^-$$
$$z = \lambda \Delta t$$
$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{1-z}$$

Méthode d'Euler implicite

$$\tilde{\mathbb{S}} = \{z \mid \text{abs}(\tilde{\gamma}) < 1\} \neq \mathbb{C}^-$$



- Stabilité des problèmes stables conservée $\forall \Delta t$
- Stabilisation numérique pour des problèmes instables si z est hors du cercle unité centré en $(+1, 0)$
- Problèmes neutres stabilisés pour un pas de temps non nul

Equations différentielles ordinaires

Méthode de Crank–Nicolson

En faisant la moyenne des méthodes d'Euler explicite et implicite, on a

$$\dot{\mathrm{u}}\big|_{\mathrm{t}^{(n)}} \simeq \frac{\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)} - \tilde{\mathrm{u}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\lambda}{2}(\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)} + \tilde{\mathrm{u}}^{(n)})$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\left(1 - \frac{\mathrm{z}}{2}\right)\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)} = \left(1 + \frac{\mathrm{z}}{2}\right)\tilde{\mathrm{u}}^{(n)}$$

dont on déduit le gain approché

$$\tilde{\gamma} = \frac{1 + \frac{\mathrm{z}}{2}}{1 - \frac{\mathrm{z}}{2}}$$

Eq. différentielles ordinaires

$\mathbb{S} = \{\, z \mid \mathrm{abs}(\gamma) < 1 \,\} = \mathbb{C}^-$

$z = \lambda \Delta t$

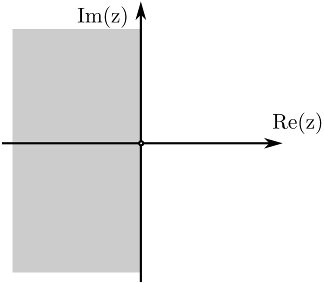
$\tilde{\gamma} = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

Méthode de Crank–Nicolson

$$\tilde{\mathbb{S}} = \{z \mid \mathrm{abs}(\tilde{\gamma}) < 1\} = \mathbb{C}^-$$

On a donc la stabilité absolue

$$\boxed{\tilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}}$$



- Stabilité des problèmes stables conservée $\forall \Delta t$
- Instabilité des problèmes instables conservée $\forall \Delta t$
- Neutralité des problèmes neutres conservée $\forall \Delta t$

Equations différentielles ordinaires

$\dot{\mathrm{u}} = \lambda \mathrm{u} = f(u)$

Méthode-theta

En faisant une combinaison linéaire des méthodes d'Euler explicite et implicite, on a

$$\dot{\mathrm{u}}\big|_{\mathrm{t}^{(n)}} \simeq \frac{\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)} - \tilde{\mathrm{u}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = (1-\theta)\ \underbrace{\lambda \tilde{\mathrm{u}}^{(n)}}_{= f(\tilde{\mathrm{u}}^{(n)})} + \theta\ \underbrace{\lambda \tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)}}_{= f(\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)})}$$

La méthode-theta regroupe les schémas d'intégration de

- Euler explicite $\quad \theta = 0 \quad \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t})$
- Euler implicite $\quad \theta = 1 \quad \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t})$
- Crank–Nicolson $\quad \theta = 1/2 \quad \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^2)$

Problème d'évolution

Discrétisation spatiale - Formulation forte

On considère l'équation de diffusion instationnaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \Omega = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ u(x, \mathrm{t}_0) = u_0(x) \end{cases}$$

avec des conditions aux limites périodiques et la solution

$$\boxed{u(x,t) \in C^2(\Omega)}$$

Problème d'évolution

Discrétisation spatiale - Formulation intégrale

La formulation intégrale est obtenue par produit scalaire par une fonction test (pondération). On obtient ainsi

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot v \, dV = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Problème d'évolution

Discrétisation spatiale

En utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, il vient

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot \delta(\mathrm{x}_i) \, dx = \int_\Omega f \cdot \delta(\mathrm{x}_i) \, dx, \quad \forall i$$

soit

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{x}_i} - \nu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i$$

Avec une approximation centrée du second ordre, on obtient les équations semi-discrètes sous forme indicielle

$$\dot{\mathrm{u}}_i - \nu \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i$$

Problème d'évolution

$\dot{\mathrm{u}}_i - \nu \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} = \mathrm{f}_i$

Discrétisation spatiale

et sous forme matricielle, on a

$$\boxed{\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}}$$

où la matrice de masse $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, et la matrice de discrétisation circulaire et tridiagonale

$$\mathbf{A} = -\frac{\nu}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & +1 & & & +1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ +1 & & & +1 & -2 \end{pmatrix}$$

Prob. évolution

Discrétisation temporelle

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$$

$$\dot{\mathrm{u}}\big|_{\mathrm{t}^{(n)}} \simeq \frac{\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)} - \tilde{\mathrm{u}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = (1-\theta) f(\tilde{\mathrm{u}}^{(n)}) + \theta f(\tilde{\mathrm{u}}^{(n+1)})$$

Pour la discrétisation temporelle, on écrit le système sous la forme

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

Par exemple, en utilisant la méthode-theta, il vient

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}})_{\mathrm{t}^{(n)}} \simeq \frac{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} = (1-\theta)\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}) + \theta\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)})$$

étant donné que dans ce cas particulier

$$\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M} = \mathbf{const}$$

Problème d'évolution

Discrétisation temporelle

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{M}\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}}{\Delta t} = (1-\theta)\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)} + \theta\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)}$$

En isolant les termes inconnus à gauche, on obtient le système d'équations algébriques

$$\boxed{\mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)} + (1-\theta)\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n)} + \theta\mathbf{M}\mathbf{f}^{(n+1)}}$$

où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \theta\mathbf{A}, \qquad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + (\theta - 1)\mathbf{A}$$

où on a tenu compte du fait que, dans ce cas particulier,

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A} = \mathbf{const}$$

Stabilité linéaire continue

$\partial_t \boldsymbol{u} + A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$

Equation linéarisée

On considère la solution d'équilibre perturbée

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \underbrace{\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})}_{\text{équilibre}} + \underbrace{\epsilon \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)}_{\text{perturbation}}, \quad \epsilon \ll 1$$

Par un développement limité au premier ordre, on obtient

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon \boldsymbol{u}')}{\partial t} + A(\overline{\boldsymbol{u}}) + \left.\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\overline{\boldsymbol{u}}} (\epsilon \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{f}$$

Etant donné que l'équilibre $\overline{\boldsymbol{u}}$ est solution des équations, l'évolution de la perturbation est gouvernée par l'équation linéarisée

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + \underbrace{\left.\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\overline{\boldsymbol{u}}} (\boldsymbol{u}')}_{L(\overline{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}')} = 0$$

Stabilité linéaire continue

$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + L(\overline{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}') = 0$

Expansion en modes normaux

Puis, en admettant une perturbation de la forme

$$\boldsymbol{u}'(x,t) = \widehat{\mathrm{u}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)}$$

on obtient le problème aux valeurs propres

$$\underbrace{-\mathrm{i}\omega}_{=\lambda}\, \widehat{\mathrm{u}} + \mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{u}}, \widehat{\mathrm{u}}) = 0$$

Le critère de stabilité linéaire d'une solution d'équilibre est donc donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\omega) < 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad &\rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\boldsymbol{u}'(t)|| = 0,\ \forall \boldsymbol{u}'(\mathrm{t}_0) \\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad &\rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\boldsymbol{u}'(t)|| = 0,\ \forall \boldsymbol{u}'(\mathrm{t}_0) \end{aligned}$$

Stabilité linéaire continue

$$\partial_t u - \nu \, \partial^2_{xx} u = f$$
$$\lambda = -\mathrm{i}\omega$$

Relation de dispersion

Dans le cas de l'équation de diffusion, l'équation linéarisée s'écrit

$$\partial_t u' - \nu \, \partial^2_{xx} u' = 0$$

Avec une solution de la forme $u'(x,t) = \widehat{\mathrm{u}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$, on obtient la relation de dispersion classique

$$\omega = -\mathrm{i}\nu \mathrm{k}^2, \quad \lambda = -\nu \mathrm{k}^2$$

On a donc stabilité linéaire de toutes les solutions d'équilibre puisque

$$\mathrm{Im}(\omega) < 0, \quad \forall k \neq 0$$
$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0, \quad \forall k \neq 0$$

Stabilité linéaire discrète

$\partial_t \boldsymbol{u}' + L(\overline{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{0}$

Problème aux valeurs propres généralisé

La discrétisation spatiale des équations linéarisées conduit au système d'équations différentielles ordinaires

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{L}\mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

En admettant une perturbation de la forme

$$\mathbf{u}' = \widehat{\mathbf{u}} \exp(\underbrace{-\mathrm{i}\tilde{\omega}}_{=\tilde{\lambda}} t)$$

on obtient le problème aux valeurs propres généralisé

$$\boxed{\tilde{\lambda}^{(k)}\mathbf{M}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{L}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad k = 1, \ldots, \mathrm{p}}$$

Stabilité linéaire discrète

Problème aux valeurs propres généralisé

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{v}$$
$$\tilde{\Lambda}_{jk} = \tilde{\lambda}^{(k)}\delta_{jk}$$
$$\dot{\mathrm{u}} = \lambda \mathrm{u} = f(u)$$

Une solution d'équilibre est donc linéairement stable si

$$\mathrm{Re}(\tilde{\lambda}^{(k)}) < 0, \quad \forall k \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\mathbf{u}'(t)|| = 0, \ \forall \mathbf{u}'(\mathrm{t}_0)$$

Stabilité linéaire discrète

$$\tilde{\lambda}^{(k)}\mathbf{M}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{L}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{I}$$

Schéma centré du second ordre

Dans le cas de l'équation de diffusion, avec le schéma centré du second ordre, le problème aux valeurs propres généralisé se réduit à

$$\mathbf{L}\widehat{\mathbf{u}} = \underbrace{-\tilde{\lambda}}_{\equiv \sigma}\,\widehat{\mathbf{u}}$$

où σ est valeur propre de

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} = -\frac{\nu}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & +1 & & & +1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ +1 & & & +1 & -2 \end{pmatrix}$$

Stabilité linéaire discrète

Schéma centré du second ordre

Comme $\mathbf{L}$ est circulaire, symétrique et tridiagonale

$$\mathbf{L}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ses valeurs propres sont données par

$$\sigma^{(k)} = \alpha + 2\beta \cos(\psi_k), \quad \psi_k = 2\pi \frac{k-1}{\mathrm{p}+1}$$

Stabilité linéaire discrète

$$\tilde{\lambda}\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$
$$\sigma = -\tilde{\lambda}$$

Schéma centré du second ordre

Dans ce cas, on a

$$\alpha = \frac{2\nu}{h^2}, \quad \beta = -\frac{\nu}{h^2}$$

dont on déduit que

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = \frac{2\nu}{h^2}\left(\cos(\psi_k) - 1\right) \leq 0, \quad \forall \nu, h \geq 0$$

La stabilité linéaire des solutions d'équilibre est donc conservée après discrétisation quel que soit l'intervalle entre les noeuds de maillage h.

Stabilité linéaire discrète

Consistance

Consistance absolue. Une méthode de discrétisation est dite *absolument consistante* si elle préserve le caractère des solutions d'équilibre *sans restriction* sur les paramètres de discrétisation.

Consistance conditionnelle. Une méthode de discrétisation est dite *conditionnellement consistante* si elle préserve le caractère des solutions d'équilibre *avec restriction* sur les paramètres de discrétisation.

Inconsistance. Une méthode de discrétisation est dite *inconsistante* si, quels que soient les paramètres de discrétisation, elle ne permet pas de conserver le caractère des solutions d'équilibre.

Stabilité linéaire discrète

Consistance

Pour l'*équation de diffusion*, le *schéma aux différences finies centré du second ordre* est *absolument consistant* puisqu'il conserve la stabilité linéaire des solutions d'équilibre au niveau semi-discret

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = \frac{2\nu}{h^2}\left(\cos(\psi_k) - 1\right) \le 0, \quad \forall \nu, h \ge 0$$

quel que soit l'intervalle entre les noeuds de maillage h.

Stabilité numérique

$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{L}\mathbf{u}' = \mathbf{0}$

Problème aux valeurs propres généralisé

En partant des équations linéarisées semi-discrètes et en utilisant la méthode-theta, on obtient les équations discrètes suivantes

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}'^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}'^{(n)}$$

où les matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{R}$ sont données par

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta \mathbf{L}$$
$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta - 1)\mathbf{L}$$

Stabilité numérique

Problème aux valeurs propres généralisé

$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}'^{(n+1)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}'^{(n)}$

$\mathbf{H}$ étant inversible, on peut démontrer en diagonalisant le système que les gains approchés $\tilde{\gamma}^{(k)}$ sont donnés par la solution du problème aux valeurs propres généralisé

$$\boxed{\tilde{\gamma}^{(k)}\mathbf{H}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{R}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, \mathrm{p}}$$

Une solution d'équilibre est donc linéairement stable au niveau discret si les gains approchés

$$|\tilde{\gamma}^{(k)}| < 1, \quad \forall k \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\tilde{\mathbf{u}}'^{(n)}|| = 0, \ \forall \tilde{\mathbf{u}}'^{(0)}$$

Stabilité numérique

Schéma centré du second ordre & Euler explicite

$$\tilde{\gamma}^{(k)}\mathbf{H}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} = \mathbf{R}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta\mathbf{L}$$
$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta \mathrm{t}} + (\theta - 1)\mathbf{L}$$

Avec la méthode d'Euler explicite ($\theta = 0$), le problème aux valeurs propres généralisé devient

$$\tilde{\gamma}^{(k)}\widehat{\mathbf{u}}^{(k)} = (\mathbf{I} - \Delta \mathrm{t}\mathbf{L})\widehat{\mathbf{u}}^{(k)}$$

Dans le cas de l'équation de diffusion, avec le schéma centré du second ordre, on trouve que les gains sont donnés par

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = \frac{2\nu\Delta \mathrm{t}}{h^2}\left(\cos(\psi_k) - 1\right) + 1$$

Stabilité numérique

Schéma centré du second ordre & Euler explicite

Pour conserver la stabilité des solutions d'équilibre ($|\tilde{\gamma}^{(k)}| < 1$), on a donc la restriction

$$\boxed{\Delta \mathrm{t} < \frac{h^2}{2\nu}}$$

Le couplage d'un *schéma aux différences finies centré du second ordre* avec la méthode d'*Euler explicite* pour la discrétisation de l'*équation de diffusion* est donc une méthode de discrétisation *conditionnellement consistante*.

Références

- *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Springer, 2000
- *High-order methods for incompressible fluid flow*, M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund, Cambridge University Press, 2002