METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 18 avril 2024

Solutions VIII

1 Equation d'advection instationnaire

1. En écrivant l'équation d'advection instationnaire sous forme intégrale et en utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, on obtient

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{x}_i} + \mathrm{c}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad \forall i, \tag{1}$$

puisqu'on considère des conditions aux limites périodiques. Avec une approximation centrée du second ordre pour le terme d'advection et la méthode d'Euler explicite pour la discrétisation temporelle, il vient

$$\frac{\tilde{\mathrm{u}}_i^{(n+1)} - \tilde{\mathrm{u}}_i^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} + \mathrm{c}\frac{\tilde{\mathrm{u}}_{i+1}^{(n)} - \tilde{\mathrm{u}}_{i-1}^{(n)}}{2h} = \mathrm{f}_i^{(n)}, \quad \forall i. \tag{2}$$

2. En utilisant les développements de Taylor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} = \frac{\mathrm{u}^{(n+1)} - \mathrm{u}^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} - \frac{\Delta \mathrm{t}}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{t}^{(n)}} \pm \mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}^2), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - \mathrm{u}_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \tag{4}$$

et en ne gardant que les termes dominants, on aboutit à l'équation modifiée

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}^{(n)}} + \frac{\Delta \mathrm{t}}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}^{(n)}} + \mathrm{c}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}^{(n)}} + \mathrm{c}\frac{h^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i,\mathrm{t}^{(n)}} = \mathrm{f}_i^{(n)}. \tag{5}$$

Pour interpréter les termes numériques intervenant dans l'équation modifiée, il convient de substituer la dérivée temporelle seconde par une dérivée spatiale. Pour cela, on se restreint au cas homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{c}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

qui permet d'obtenir la relation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{c}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

et ainsi d'écrire l'équation modifiée sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{c}\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\mathrm{c}^2\Delta \mathrm{t}}{2!}}_{\equiv \alpha_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\mathrm{c}h^2}{3!}}_{\equiv \alpha_3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{8}$$

La relation de dispersion d'une onde $u = \hat{\mathrm{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$ associée à cette équation est donnée par

$$\omega = \mathrm{ck} - \alpha_3\mathrm{k}^3 + \mathrm{i}\alpha_2\mathrm{k}^2. \tag{9}$$

La discrétisation temporelle introduit un terme anti-diffusif proportionel à α_2 alors que la discrétisation spatiale introduit un terme dispersif proportionel à α_3. En effet, la partie réelle de la vitesse de phase

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{k}} = \mathrm{c} - \alpha_3 \mathrm{k}^2 + \mathrm{i}\alpha_2 \mathrm{k}$$

est dépendante du nombre d'onde. Ainsi, on a dispersion numérique puisque, à cause de la discrétisation, toutes les ondes ne se propagent pas à la même vitesse.