METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 21 mars 2024

Solutions V

1 Equation d'advection-diffusion stationnaire

1. En écrivant l'équation d'advection-diffusion stationnaire sous forme intégrale et en utilisant les fonctions test de la méthode des différences finies, on obtient

$$\begin{cases} A(u)|_{\mathrm{x}_i} = -\nu \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \mathrm{c} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad i = 2, \ldots, \mathrm{p}-1, \\ \mathrm{u}_1 = 0,\ \mathrm{u}_\mathrm{p} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

En supposant que $\mathrm{c} > 0$, on utilise une approximation rétrograde du premier ordre pour la dérivée première ainsi qu'une approximation centrée du second ordre pour la dérivée seconde

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_{i-1}}{h} + \frac{h}{2!} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^2), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4). \tag{3}$$

L'utilisation de ces schémas conduit au système d'équations linéaires écrit sous forme indicielle

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\mathrm{u}_{i-1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i+1}}{h^2} + \mathrm{c} \dfrac{\mathrm{u}_i - \mathrm{u}_{i-1}}{h} = 0, \quad i = 2, \ldots, \mathrm{p}-1, \\ \mathrm{u}_1 = 0,\ \mathrm{u}_\mathrm{p} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

2. Pour établir l'équation modifiée relative à ce schéma, on se sert des relations (2-3) que l'on substitue dans le système d'équations (4). On obtient ainsi

$$\left(-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{c} \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\mathrm{x}_i} + \left(-\nu \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\mathrm{c}h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4) = 0. \tag{5}$$

A l'ordre dominant, il reste

$$A(u_h) = A(u) + E_h(u) = \underbrace{-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{c} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{physique}} \underbrace{-\nu \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\mathrm{c}h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{numérique}} = 0, \tag{6}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$A(u_h) = -\overbrace{\left(\nu + \frac{\mathrm{c}h}{2}\right)}^{=\nu+\nu_h} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{c} \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{7}$$

La discrétisation amont au premier ordre du terme advectif introduit donc une diffusion d'origine numérique, dont le coefficient vaut $\nu_h = \frac{\mathrm{c}h}{2}$, qui s'ajoute à la diffusion physique du problème et qui dégrade la précision de la méthode au premier ordre. Dans la pratique, il faut impérativement veiller à ce que

$$\nu_h \ll \nu \tag{8}$$

pour garantir que la solution numérique soit suffisamment précise.

3. Pour l'approche centrée, la monotonicité de la solution numérique est prédite en analysant le nombre de Péclet local

$$\widehat{\mathrm{Pe}} = \frac{\mathrm{c}h}{2\nu}, \tag{9}$$

la solution numérique étant monotone s'il est inférieur à l'unité.

Dans le cas de la méthode *Upwind* du premier ordre, la discrétisation introduit un coefficient de diffusion numérique supplémentaire ν_h. On étudie donc la monotonicité par rapport au nombre de Péclet effectif

$$\widehat{\mathrm{Pe}}_h = \frac{\mathrm{c}h}{2(\nu + \nu_h)} = \frac{\mathrm{c}h}{2\nu + \mathrm{c}h} < 1, \quad \forall \nu, \mathrm{c}, h > 0. \tag{10}$$

Ainsi, bien que sa précision ne soit que du premier ordre, la méthode *Upwind* permet d'obtenir une solution monotone quel que soient les paramètres physiques et de discrétisation, c'est-à-dire pour tout nombre de Péclet local.