METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 21 mars 2024

Série V

1 Equation d'advection-diffusion stationnaire

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} A(u) = -\nu\, \partial_{xx}^2 u + \mathrm{c}\, \partial_x u = 0, \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) = 0,\ u(1) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

avec ν le coefficient de diffusion, c la vitesse d'advection, et dont la solution exacte est

$$u(x) = \frac{\exp\left(\frac{\mathrm{c}x}{\nu}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\mathrm{c}}{\nu}\right) - 1}. \tag{2}$$

La discrétisation de l'équation (1) par la méthode des différences finies, avec des schémas centrés du second ordre pour les deux termes, conduit à des oscillations d'origine numérique lorsque le nombre de Péclet local

$$\widehat{\mathrm{Pe}} = \frac{\mathrm{c}h}{2\nu} \geq 1. \tag{3}$$

Ceci implique la restriction

$$h \leq \frac{2\nu}{\mathrm{c}} \tag{4}$$

pour garantir la monotonicité de la solution, ce qui peut devenir prohibitif pour des problèmes à advection dominante.

Comme alternative à l'approche centrée, on considère la méthode *Upwind* du premier ordre dont l'idée est de décentrer la discrétisation du terme advectif vers le domaine de dépendance (à l'amont).

1. Discrétiser l'équation (1) par la méthode *Upwind* du premier ordre, c'est-à-dire avec un schéma centré du second ordre pour la dérivée seconde, et un schéma amont du premier ordre pour la dérivée première.
2. Etablir et interpréter l'équation modifiée obtenue en utilisant cette discrétisation, puis en déduire l'ordre de convergence de la méthode.
3. Etudier la monotonicité de la solution numérique en fonction du nombre de Péclet local.