

Solutions IV

1 Schémas aux différences finies

1. L'ordre de précision d'un schéma non-centré est donné par la relation

$$\epsilon = \mathcal{O}(h^{r-n}). \quad (1)$$

Dans ce cas, étant donné que $n = 3$ et que l'on cherche un schéma du premier ordre, on a besoin d'un support de $r = 4$ points. On écrit donc les r développements de Taylor à r termes suivants

$$u_{i-3} = \frac{(3h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} - \frac{(3h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(3h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{(3h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \quad (2)$$

$$u_{i-2} = \frac{(2h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} - \frac{(2h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \quad (3)$$

$$u_{i-1} = \frac{(1h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} - \frac{(1h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(1h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{(1h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \quad (4)$$

$$u_i = \frac{(0h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} + \frac{(0h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(0h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} + \frac{(0h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^4), \quad (5)$$

qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle équivalente

$$\begin{pmatrix} u_{i-3} \\ u_{i-2} \\ u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{(3h)^0}{0!} & -\frac{(3h)^1}{1!} & \frac{(3h)^2}{2!} & -\frac{(3h)^3}{3!} \\ \frac{(2h)^0}{0!} & -\frac{(2h)^1}{1!} & \frac{(2h)^2}{2!} & -\frac{(2h)^3}{3!} \\ \frac{(1h)^0}{0!} & -\frac{(1h)^1}{1!} & \frac{(1h)^2}{2!} & -\frac{(1h)^3}{3!} \\ \frac{(0h)^0}{0!} & +\frac{(0h)^1}{1!} & \frac{(0h)^2}{2!} & +\frac{(0h)^3}{3!} \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \\ \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{pmatrix} \Big|_{x_i} \quad (6)$$

où la matrice des coefficients de Taylor s'écrit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -3h & \frac{9h^2}{2} & -\frac{27h^3}{6} \\ 1 & -2h & \frac{4h^2}{2} & -\frac{8h^3}{6} \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ensuite, on multiplie à gauche par \mathbf{T}^{-1} pour obtenir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \\ \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \end{pmatrix} \Big|_{x_i} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{6h} & +\frac{9}{6h} & -\frac{18}{6h} & +\frac{11}{6h} \\ -\frac{1}{h^2} & +\frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & +\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^3} & +\frac{1}{h^3} & -\frac{3}{h^3} & +\frac{1}{h^3} \end{pmatrix}}_{= \mathbf{T}^{-1}} \begin{pmatrix} u_{i-3} \\ u_{i-2} \\ u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

On en déduit donc le schéma de dérivation recherché

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i} \simeq \frac{u_i - 3u_{i-1} + 3u_{i-2} - u_{i-3}}{h^3}. \quad (9)$$

2. L'ordre de précision d'un schéma non-centré est donné par la relation

$$\epsilon = \mathcal{O}(h^{r-n}). \quad (10)$$

Dans ce cas, étant donné que $n = 2$ et que l'on cherche un schéma du premier ordre, on a besoin d'un support de $r = 3$ points. On écrit donc les r développements de Taylor à r termes suivants

$$u_i = \frac{(0h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} + \frac{(0h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(0h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^3), \quad (11)$$

$$u_{i+1} = \frac{(1h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} + \frac{(1h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(1h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^3), \quad (12)$$

$$u_{i+2} = \frac{(2h)^0}{0!} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \Big|_{x_i} + \frac{(2h)^1}{1!} \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \Big|_{x_i} + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} \pm \mathcal{O}(h^3), \quad (13)$$

qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle équivalente

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{pmatrix} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{(0h)^0}{0!} & \frac{(0h)^1}{1!} & \frac{(0h)^2}{2!} \\ \frac{(1h)^0}{0!} & \frac{(1h)^1}{1!} & \frac{(1h)^2}{2!} \\ \frac{(2h)^0}{0!} & \frac{(2h)^1}{1!} & \frac{(2h)^2}{2!} \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \\ \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{pmatrix} \Big|_{x_i} \quad (14)$$

où la matrice des coefficients de Taylor s'écrit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & \frac{h^2}{2} \\ 1 & 2h & \frac{4h^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ensuite, on multiplie à gauche par \mathbf{T}^{-1} pour obtenir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} \\ \frac{\partial^1 u}{\partial x^1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{pmatrix} \Big|_{x_i} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2h} & +\frac{4}{2h} & -\frac{1}{2h} \\ +\frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & +\frac{1}{h^2} \end{pmatrix}}_{= \mathbf{T}^{-1}} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

On en déduit donc le schéma de dérivation recherché

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} \simeq \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2}. \quad (17)$$

2 Méthode des volumes finis

Avec la méthode des volumes finis, le domaine de calcul Ω est subdivisé en sous-domaines Ω_i appelés volumes finis.

A chaque volume fini est associé un noeud i , placé au centre et dont la coordonnée vaut x_i . La valeur de la solution numérique constante sur chaque volume fini est notée u_i . A chaque volume fini Ω_i est également associée une fonction test v_i valant 1 sur le volume fini Ω_i auquel elle est rattachée et 0 en dehors.

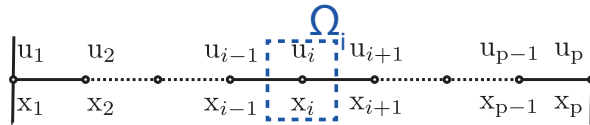


Figure 1: Méthode des volumes finis, définitions.

Nous admettrons que tous les volumes finis ont une longueur h et une surface latérale S arbitraire puisque nous considérons un problème mono-dimensionnel.

La première étape de la discrétisation est la dérivation de la formulation faible de l'équation de diffusion stationnaire qui s'obtient en premier lieu par le produit scalaire avec les fonctions test

$$-\int_{\Omega} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot v \, dV = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV, \quad \forall v \in L^2(\Omega), \quad (18)$$

puis par une intégration par parties du terme qui comporte une dérivée seconde

$$\int_{\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dV - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \cdot n \, dS = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV, \quad \forall v \in L^2(\Omega), \quad (19)$$

faisant ainsi apparaître un terme de bord. Par additivité de l'intégration, cette formulation est équivalente à la somme sur les p volumes finis qui subdivisent le domaine Ω

$$\sum_{i=1}^p \int_{\Omega_i} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x}}_{=0} \, dV_i - \int_{\partial\Omega_i} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{v_i}_{=1} \cdot n \, dS_i = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega_i} f \cdot \underbrace{v_i}_{=1} \, dV_i, \quad \forall v_i \in L^2(\Omega). \quad (20)$$

Après simplification, nous obtenons la relation suivante qui doit être vérifiée sur chaque volume fini

$$-\int_{\partial\Omega_i} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n \, dS_i = \int_{\Omega_i} f \cdot dV_i, \quad \forall i, \quad (21)$$

où il est nécessaire d'approximer le terme de flux sur chacun des deux bords du volume fini Ω_i .

Comme proposé dans la donnée, nous utilisons un schéma aux différences finies centré du second ordre permettant d'obtenir les dérivées premières aux bord des volumes finis à partir des valeurs nodales adjacentes. On obtient ainsi

$$-\nu \left(-\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) S = f_i h S, \quad \forall i. \quad (22)$$

Après simplification et prise en compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{cases} -\nu \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h} = h f_i, & i = 2, \dots, p-1, \\ u_1 = 0, \quad \frac{u_p - u_{p-1}}{h} = 0, \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle standard $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$, avec $\mathbf{M} = h\mathbf{I}$ et

$$\mathbf{A} = -\frac{\nu}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & +1 & -2 & +1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à ceux obtenus par les méthodes des différences finies et des éléments finis.