METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 7 mars 2024

Solutions III

1 Equations aux dérivées partielles du second degré

Equation 1

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = 16 > 0. \tag{2}$$

  Cette équation est donc de type hyperbolique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes

$$(\beta \pm \sqrt{\Delta})\; dx - \alpha\; dy = 0, \tag{3}$$

  dont on déduit que

$$\xi = 3x - y = \text{const}, \tag{4}$$
$$\eta = x - 3y = \text{const}. \tag{5}$$

Equation 2

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{6}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = 0. \tag{7}$$

  Cette équation est donc de type parabolique.

- De manière à déterminer l'équation de l'unique famille de caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$\xi = x - y = \text{const}. \tag{8}$$

Equation 3

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + u, \tag{9}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = -4 < 0. \tag{10}$$

  Cette équation est donc de type elliptique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$dx - dy \pm 2\mathrm{i}\, dx = 0, \tag{11}$$

  et par conséquent on obtient

$$x - y \pm 2\mathrm{i}x = \text{const.} \tag{12}$$

Equation 4

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{13}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = \frac{1}{4} > 0. \tag{14}$$

  Cette équation est donc de type hyperbolique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$\xi = 3x - y = \text{const}, \tag{15}$$

$$\eta = 2x - y = \text{const.} \tag{16}$$

Equation 5

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{17}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = -x^2y^2 < 0. \tag{18}$$

  Cette équation est donc de type elliptique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$y\, dy \pm \mathrm{i}x\, dx = 0, \tag{19}$$

  et par conséquent on obtient les caractéritiques complexes conjuguées

$$y^2 \pm \mathrm{i}x^2 = \text{const.} \tag{20}$$

Equation 6

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \tag{21}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = -y < 0. \tag{22}$$

  Cette équation est donc de type elliptique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$dx \pm \mathrm{i}y^{-1/2}\, dy = 0, \tag{23}$$

  et par conséquent on obtient les caractéritiques complexes conjuguées

$$x \pm 2\mathrm{i}y^{1/2} = \text{const}. \tag{24}$$

Equation 7

- On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{25}$$

  dont le caractère mathématique est donné par le signe de

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = 0. \tag{26}$$

  Cette équation est donc de type parabolique.

- De manière à déterminer l'équation des caractéristiques, on utilise l'équation des pentes (2) dont on déduit que

$$y\, dx - x\, dy = 0, \tag{27}$$

  et par conséquent

$$\xi = \frac{y}{x} = \text{const}. \tag{28}$$

2 Equations de Prandtl-Glauert

En utilisant le potentiel ϕ, les deux composantes de vitesse s'écrivent respectivement

$$u'_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad u'_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{29}$$

En effectuant la substitution de ces relations dans les équations de Prandtl-Glauert, on trouve immédiatement que la première équation devient

$$(1 - \mathrm{Ma}^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{30}$$

alors que la seconde est trivialement satisfaite. Le caractère mathématique de l'équation du potentiel est donné par le signe de

$$\Delta = \mathrm{Ma}^2 - 1. \tag{31}$$

Cette équation est donc de type

- elliptique pour un écoulement subsonique (Ma < 1) et il existe deux familles de caractéristiques complexes conjugées.

- parabolique pour un écoulement sonique ($\mathrm{Ma} = 1$) et il n'existe qu'une seule famille de caractéristiques réelles doubles.
- hyperbolique pour écoulement supersonique ($\mathrm{Ma} > 1$) et il existe deux familles de caractéristiques réelles.

Les caractéristiques sont données par l'équation des pentes

$$(\beta \pm \sqrt{\Delta})\, dx - \alpha\, dy = 0, \tag{32}$$

dont on déduit que

$$\xi = x - \theta y = \mathrm{const}, \tag{33}$$

$$\eta = x + \theta y = \mathrm{const}, \tag{34}$$

avec $\theta = \sqrt{\mathrm{Ma}^2 - 1}$. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus en cours à partir des équations de Prandtl-Glauert.