METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 7 mars 2024

Série III

1 Equations aux dérivées partielles du second degré

Déterminer le caractère mathématique des équations suivantes et l'équation de leurs caractéristiques.

1. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + u$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
5. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0$
7. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2 Equations de Prandtl-Glauert

On rappelle les équations de Prandtl-Glauert vues en cours

$$(1 - \mathrm{Ma}^2)\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial x} - \frac{\partial u'_x}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

où la seconde équation exprime le caractère irrotationel du champ de vitesse $\boldsymbol{u}'$ qui dérive par conséquent du potentiel ϕ de telle sorte que

$$\boldsymbol{u}' = (u'_x, u'_y) = \boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{3}$$

1. En utilisant la relation (3), dériver l'équation du potentiel à partir des équations de Prandtl-Glauert.
2. Déterminer le caractère mathématique ainsi que les courbes caractéristiques de l'équation du potentiel en fonction du nombre de Mach.
3. Comparer ces résultats avec ceux issus de l'analyse du système d'équations (1)-(2).