

Méthodes de discrétisation en fluides

3. Méthodes de discrétisation classiques

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 7 mars 2024

Contenu

Introduction

- Caractéristiques des méthodes de discrétisation
- Rappels d'analyse

Formulation des équations aux dérivées partielles

- Formulation forte
- Formulation intégrale
- Formulation faible
- Equation de diffusion

Interpolation

- Définitions
- Base modale de Fourier
- Dérivation

Bases

- Bases nodales
- Bases modales

Classes de méthodes de discrétisation

- Définition
- Méthodes de collocation
- Méthodes de Petrov-Galerkin
- Méthodes de Galerkin

Méthodes de discrétisation classiques

- Définition
- Méthode de éléments finis
- Méthode des différences finies
- Méthode des volumes finis

Epilogue

- Conclusion

Introduction

Caractéristiques des méthodes de discrétisation

Etant donné les contraintes de la simulation,

- problème physique

Nombre de Reynolds, de Mach, capillaire. . .

- précision requise

quantités intégrales/locales, tendances/valeurs absolues

- ressources et temps de calcul à disposition

calculateur parallèle, machine de bureau

quelle est la méthode numérique la plus adaptée?

Introduction

Caractéristiques des méthodes de discrétisation

Les méthodes numériques diffèrent en termes de

- complexité algorithmique
- espace mémoire requis (dépend aussi de l'implémentation)
- scalabilité algorithmique (paralélisation)
- précision pour un problème donné

Il est important de connaître une large gamme de méthodes numérique pour choisir la plus adaptée à chaque situation.

Introduction

Espaces fonctionnels

- Espace de continuité

$$C^k(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \in \mathbb{R}, \forall n \leq k \right. \right\}$$

- Espace de Lebesgue

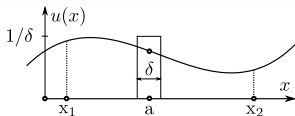
$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left| \int_{\Omega} |u(x)|^2 dV < \infty \right. \right\}$$

- Espace de Sobolev

$$H^k(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \in L^2(\Omega), \forall n \leq k \right. \right\}$$

Introduction

Distributions



- Produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dV$$

- Distribution de Dirac

$$(u, \delta(a)) = \int_{\Omega} u \cdot \delta(a) \, dV = u(a)$$

“Idée de la preuve”

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \delta(a) \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{a-\delta/2}^{a+\delta/2} u(x) \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(a)\delta}{\delta} = u(a)$$

Formulation des équations aux dérivées partielles

Formulation forte

On considère les équations ou systèmes d'équations aux dérivées partielles pouvant s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \\ \text{conditions limites et initiales} \end{cases}$$

avec la solution

$$\mathbf{u} \in C^k(\Omega)$$

La classe de continuité de la solution dépend de l'ordre de dérivation maximal k dans l'opérateur spatial $A(\mathbf{u})$.

Formulation des EDP

Formulation intégrale

$$\partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{f} - A(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dV = 0$$

La formulation intégrale s'obtient par produit scalaire avec une fonction test (pondération)

$$\int_{\Omega} [\partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$$

Formulation des EDP

Formulation intégrale

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dV$$

$$\int_{\Omega} [\partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV$$

ce qui s'écrit formellement

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \\ \text{conditions limites et initiales} \end{cases}$$

avec la solution

$$\mathbf{u} \in H^k(\Omega)$$

Formulation des EDP

Formulation faible

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\partial_t \mathbf{u} + A(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dV &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{g} \, dV &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} \, dS \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS\end{aligned}$$

La formulation faible s'obtient par

1. expression du terme spatial sous forme de flux
2. intégration par partie du terme spatial

On obtient donc successivement

$$\int_{\Omega} [\partial_t \mathbf{u} + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u})}_{= A(\mathbf{u})}] \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$$

Formulation EDP

Formulation faible

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - F(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV$$

Puis, en introduisant la forme bilinéaire

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} F(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS$$

la formulation faible du problème devient

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \\ \text{conditions limites et initiales} \end{cases}$$

avec la solution

$$\mathbf{u} \in H^{k-1}(\Omega)$$

Formulation des équations aux dérivées partielles

Equation de diffusion - Formulation forte

On considère l'équation de diffusion instationnaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \underbrace{\nu \nabla^2 u}_{= A(u)} = f \\ \text{conditions limites et initiales} \end{array} \right.$$

avec la solution

$$u \in C^2(\Omega)$$

Formulation des équations aux dérivées partielles

Equation de diffusion - Formulation intégrale

Le produit scalaire avec une fonction test donne la formulation intégrale

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t u, v) - \underbrace{\int_{\Omega} \nu \nabla^2 u \cdot v \, dV}_{= (A(u), v)} = (f, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega) \\ \text{conditions limites et initiales} \end{array} \right.$$

avec la solution

$$u \in H^2(\Omega)$$

Formulation des équations aux dérivées partielles

Equation de diffusion - Formulation faible

En reformulant le terme spatial sous forme de flux

$$A(u) = -\nu \nabla^2 u = \nabla \cdot (-\nu \nabla u)$$

et en intégrant par partie, on obtient la formulation faible

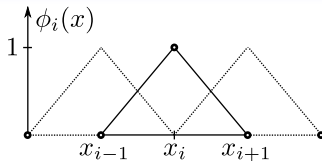
$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \underbrace{\int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dV - \int_{\partial\Omega} \nu \nabla u \cdot \mathbf{n} \cdot v \, dS}_{= \mathcal{A}(u,v)} = (f, v), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \\ \text{conditions limites et initiales} \end{array} \right.$$

avec la solution

$$\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$$

Interpolation

Définitions



- Base d'interpolation

$$\mathbb{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \dots\}$$

- Expression dans la base

$$\underbrace{u(x, t)}_{\text{esp. physique}} = \sum_{j=1}^p \underbrace{\underline{u}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \phi_j(x) + \underbrace{\tau(x, t, p)}_{\text{troncature à l'ordre } p}$$

Interpolation

Définitions

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x) + \tau(x, t, p)$$

- Approximation

Troncature de la série

$$u(x, t) \simeq u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

- Convergence

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tau(x, t, p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u(x, t) - u_h(x, t) = 0$$

Interpolation

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

Définitions

- Noeuds de collocation

$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad x_i \in \Omega$$

- Valeurs nodales

$$\overbrace{u_i(t)}^{\text{esp. nodal}} = u_h(x_i, t) = \sum_{j=1}^p \overbrace{\underline{u}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \phi_j(x_i)$$

$$\underbrace{\mathbf{u}}_{\text{nodal}} = \Phi \underbrace{\underline{\mathbf{u}}}_{\text{modal}}, \quad [\Phi]_{ij} = \phi_j(x_i)$$

- Opérateur de transformation

espace nodal $\leftrightarrow$ espace modal

$$\underline{\mathbf{u}} = \Phi^{-1} \mathbf{u} \equiv \underline{\Phi} \mathbf{u}$$

Interpolation

Base modale de Fourier

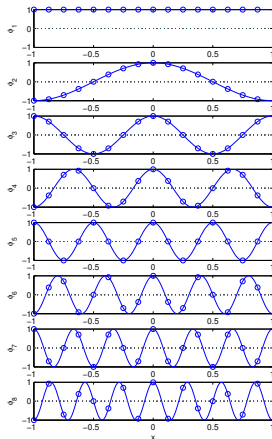
- Base

$$\phi_j = \cos(k_j x) + i \sin(k_j x) = e^{ik_j x}$$

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

- Approximation

$$u_h(x, t) = \sum_{j=-p/2}^{p/2-1} \underline{u}_k(t) e^{ik_j x}$$



Interpolation

Base modale de Fourier

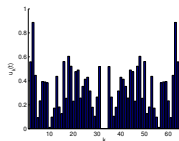
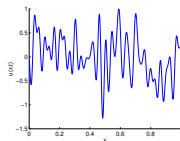
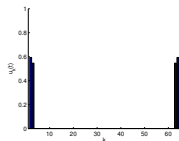
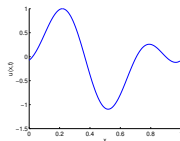
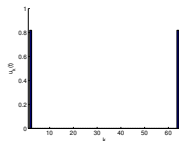
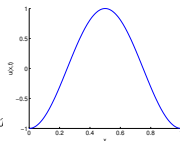
- Base

$$\phi_j = \cos(k_j x) + i \sin(k_j x) = e^{ik_j x}$$

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

- Approximation

$$u_h(x, t) = \sum_{j=-p/2}^{p/2-1} \underline{u}_k(t) e^{ik_j x}$$



Interpolation

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

Dérivation

- Approximation

$$\partial_x u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \, d_x \phi_j(x)$$

- Valeurs nodales

$$\underline{u}_{i,x}(t) = \partial_x u_h(x, t)|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \, d_x \phi_j|_{x=x_i}$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{,x} = \Phi_{,x} \underline{\mathbf{u}}, \quad [\Phi_{,x}]_{ij} = d_x \phi_j|_{x=x_i}$$

Interpolation

Dérivation

$$\mathbf{u}_{,x} = \Phi_{,x} \underline{\mathbf{u}}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \Phi^{-1} \mathbf{u} \equiv \underline{\Phi} \mathbf{u}$$

- Opérateurs nodaux et modaux

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{D}_{,x} \mathbf{u} = \Phi_{,x} \underline{\mathbf{u}} = \Phi_{,x} \underline{\Phi} \mathbf{u}$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{,x} = \underline{\mathbf{D}}_{,x} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\Phi} \Phi_{,x} \underline{\mathbf{u}}$$

- Relations entre opérateurs nodaux et modaux

Valables pour un opérateur discret quelconque

$$\mathbf{D}_{,x} = \Phi_{,x} \underline{\Phi} = \overbrace{\Phi \Phi}^{\mathbf{I}} \Phi_{,x} \underline{\Phi} = \Phi \underline{\mathbf{D}}_{,x} \underline{\Phi}$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{,x} = \underline{\Phi} \Phi_{,x} = \underline{\Phi} \Phi_{,x} \underbrace{\Phi \Phi}_{\mathbf{I}} = \underline{\Phi} \mathbf{D}_{,x} \Phi$$

Interpolation

Dérivation

- Dérivée seconde

$$\mathbf{D}_{,xx} = \mathbf{D}_{,x} \mathbf{D}_{,x} = \mathbf{D}_{,x}^2$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{,xx} = \underline{\mathbf{D}}_{,x} \underline{\mathbf{D}}_{,x} = \underline{\mathbf{D}}_{,x}^2$$

- Dérivées d'ordre supérieur

$$\mathbf{D}_{,nx} = \mathbf{D}_{,x} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{,x} = \mathbf{D}_{,x}^n$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{,nx} = \underbrace{\underline{\mathbf{D}}_{,x} \cdot \dots \cdot \underline{\mathbf{D}}_{,x}}_{n \text{ fois}} = \underline{\mathbf{D}}_{,x}^n$$

Bases

Base nodale de Lagrange

- Base

$$\phi_j(x) = \prod_{i=1, i \neq j}^p \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

- Cardinalité

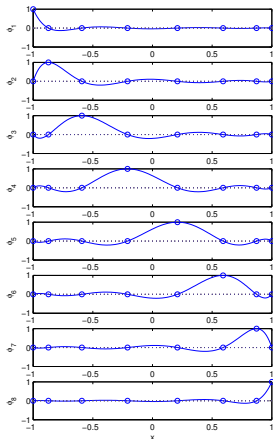
$$[\Phi]_{ij} = \phi_j(x_i) = \delta_{ij}$$

- Conséquence

$$\underbrace{\Phi}_{\text{base nodale}} = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}$$

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^p \underline{u}_j(t) \phi_j(x_i)$$

$$\mathbf{u} = \Phi \underline{\mathbf{u}}$$



Bases

Base modale de Chebyshev

- Base

$$\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = x$$

$$\phi_{j+1}(x) = 2x\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)$$

- Noeuds de collocation

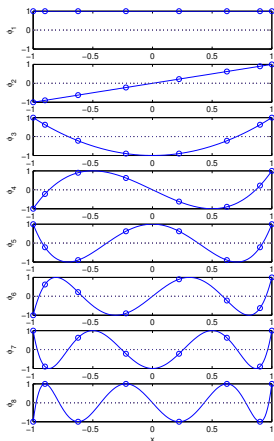
$$\mathbb{X} = \{x_i | x + \cos(\frac{\pi(i-1)}{p-1}) = 0\}, i = 1, \dots, p$$

- Conséquence

$$\Phi \neq \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{u} \neq \underline{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=1}^p \underline{\mathbf{u}}_j(t) \phi_j(x_i)$$

$$\mathbf{u} = \Phi \underline{\mathbf{u}}$$



Bases

Base modale de Fourier

- Base

$$\phi_j = \cos(k_j x) + i \sin(k_j x) = e^{ik_j x}$$

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

- Noeuds de collocation

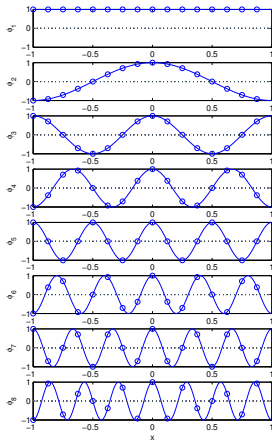
$$\mathbb{X} = \{x_i | x - \frac{2(i-1)}{p} + 1 = 0\}, \quad i = 1, \dots, p$$

- Conséquence

$$\Phi \neq \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} \neq \underline{\mathbf{u}}$$

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^p \underline{u}_j(t) \phi_j(x_i)$$

$$\mathbf{u} = \Phi \underline{\mathbf{u}}$$



Classes de méthodes de discrétisation

Définition

- Formulation des équations

Forte, intégrale, faible

- Choix des fonctions test

Principales classes

- Méthodes de collocation
- Méthodes de Galerkin (base continue/discontinue)
- Méthodes de Petrov-Galerkin (base continue/discontinue)

Classes de méthodes

Méthodes de collocation

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

$$(u, \delta(\mathbf{a})) = \int_{\Omega} u \cdot \delta(\mathbf{a}) \, dV = u(\mathbf{a})$$

- Formulation intégrale

$$(\partial_t u, v) + (A(u), v) = (f, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

- Distributions de Dirac aux noeuds de collocation

$$v_i = \delta(\mathbf{x}_i)$$

- Approximation

$$(\partial_t u_h, \delta(\mathbf{x}_i)) + (A(u_h), \delta(\mathbf{x}_i)) = (f, \delta(\mathbf{x}_i)), \quad \forall i$$

$$\dot{u}_h(\mathbf{x}_i) + A(u_h)|_{x=\mathbf{x}_i} = f_h(\mathbf{x}_i), \quad \forall i$$

Classes de méthodes

Méthodes de collocation - Eq. diffusion

$$\partial_t u - \nu \partial_{xx}^2 u = f$$

$$\dot{u}_h(\mathbf{x}_i) + A(u_h)|_{x=\mathbf{x}_i} = f_h(\mathbf{x}_i)$$

- Formulation intégrale

$$\int_{\Omega} [\partial_t u - \nu \partial_{xx}^2 u] \cdot v \, dV = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

- Approximation et fonctions test

$$\int_{\Omega} [\partial_t u_h - \nu \partial_{xx}^2 u_h] \cdot \delta(\mathbf{x}_i) \, dV = \int_{\Omega} f_h \cdot \delta(\mathbf{x}_i) \, dV, \quad \forall i$$

$$\dot{u}_h(\mathbf{x}_i) - \nu \partial_{xx}^2 u_h|_{x=\mathbf{x}_i} = f_h(\mathbf{x}_i), \quad \forall i$$

Ainsi,

$$\dot{u}_i - \nu u_{i,xx} = f_i, \quad \forall i$$

Classes de méthodes

Méthodes de collocation - Equation de diffusion

$$\dot{u}_i - \nu u_{i,xx} = f_i$$

Sous forme matricielle, ceci devient

$$\dot{\mathbf{u}} - \nu \mathbf{D}_{,xx} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

ce qui est de la forme générale

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$$

où

$$\underbrace{\mathbf{M} = \mathbf{I}}_{\text{Méthode collocation}} \quad \mathbf{A} = -\nu \mathbf{D}_{,xx}$$

Classes de méthodes

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

Méthodes de Petrov-Galerkin

- Formulation faible

$$(\partial_t u, v) + \mathcal{A}(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

- Fonctions test et variables

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x), \quad u_h \in U_h \subset H^1(\Omega)$$

$$v_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{v}_j(t) \psi_j(x), \quad v_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$$

- Approximation

$$(\partial_t u_h, v_h) + \mathcal{A}(u_h, v_h) = (f_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Classes de méthodes

Méthodes de Petrov-Galerkin

$$(\partial_t u_h, v_h) + \mathcal{A}(u_h, v_h) = (f_h, v_h)$$

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

$$v_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{v}_j(t) \psi_j(x)$$

En utilisant l'expression des fonctions test, on obtient

$$(\partial_t u_h, \sum_{j=1}^P v_j \psi_j) + \mathcal{A}(u_h, \sum_{j=1}^P v_j \psi_j) = (f_h, \sum_{j=1}^P v_j \psi_j), \quad \forall v_h \in V_h$$

Puis, par linéarité, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^P v_j (\partial_t u_h, \psi_j) + \sum_{j=1}^P v_j \mathcal{A}(u_h, \psi_j) = \sum_{j=1}^P v_j (f_h, \psi_j), \quad \forall v_h \in V_h$$

ce qui est équivalent à

$$(\partial_t u_h, \psi_i) + \mathcal{A}(u_h, \psi_i) = (f_h, \psi_i), \quad \forall \psi_i$$

Classes de méthodes

Méthodes de Petrov-Galerkin

$$(\partial_t u_h, v_h) + \mathcal{A}(u_h, v_h) = (f_h, v_h)$$

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{u}_j(t) \phi_j(x)$$

$$v_h(x, t) = \sum_{j=1}^P \underline{v}_j(t) \psi_j(x)$$

En procédant de la même manière pour u_h , on obtient les équations semi-discrètes

$$\sum_{j=1}^P \dot{u}_j(\phi_j, \psi_i) + \sum_{j=1}^P u_j \mathcal{A}(\phi_j, \psi_i) = \sum_{j=1}^P f_j(\phi_j, \psi_i), \quad \forall \psi_i$$

et sous forme matricielle on a

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{M} \mathbf{f}$$

avec

$$[\mathbf{M}]_{ij} = (\phi_j, \psi_i), \quad [\mathbf{A}]_{ij} = \mathcal{A}(\phi_j, \psi_i)$$

Classes de méthodes

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}$$

$$[\mathbf{M}]_{ij} = (\phi_j, \psi_i), \quad [\mathbf{A}]_{ij} = \mathcal{A}(\phi_j, \psi_i)$$

Méthodes de Galerkin

La méthode de Galerkin est un cas particulier de la méthode de Petrov-Galerkin qu'on obtient en utilisant la même base pour les fonctions test et la variable

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^p u_j(t) \phi_j(x), \quad u_h \in U_h \subset H^1(\Omega)$$

$$v_h(x, t) = \sum_{j=1}^p v_j(t) \phi_j(x), \quad v_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$$

On a ainsi

$$[\mathbf{M}]_{ij} = (\phi_j, \phi_i), \quad [\mathbf{A}]_{ij} = \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i)$$

Méthodes de discrétisation classiques

Définition

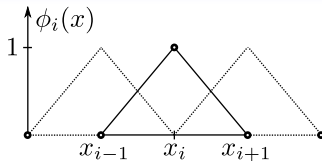
- Choix de la classe (formulation, fonctions test)
- Choix de la base d'interpolation

Principales méthodes

- Éléments finis
- Différences finies
- Volumes finis

Méthodes classiques

Méthode des éléments finis



- Formulation faible

$$(\partial_t u, v) + \mathcal{A}(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

- Fonctions test

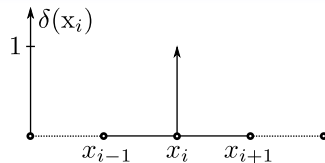
$$v_i = \phi_i(x)$$

- Interpolation des champs

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^p u_j(t) \phi_j(x)$$

Méthodes classiques

Méthode des différences finies



- Formulation intégrale

$$(\partial_t u, v) + (A(u), v) = (f, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

- Fonctions test

$$v_i = \delta(x_i)$$

- Interpolation des champs

$$u_j(t) = (u(x, t), \delta(x_j))$$

Méthodes classiques

Méthode des différences finies

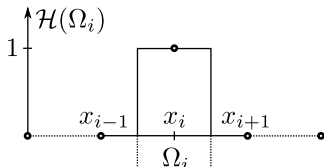
$$\begin{aligned} u_i(t) &= (u(x, t), \delta(x_i)) \\ u(x, t) &= \sum_{j=1}^P u_j(t) \phi_j(x) + \tau(x, t, p) \\ \mathbf{D}_{,x} \mathbf{u} &= \Phi_{,x} \underline{\Phi} \mathbf{u} \end{aligned}$$

- Champs connus aux points de collocation uniquement
- Base d'interpolation non-définie
- Définition des opérateurs de dérivation discrets avec des séries de Taylor

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{x=x_i} + \tau(x, t, r)$$

Méthodes classiques

Méthode des volumes finis



- Formulation faible

$$(\partial_t u, v) + \mathcal{A}(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

- Fonctions test

$$v_i = \mathcal{H}(\Omega_i)$$

- Interpolation des champs

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^p u_j \mathcal{H}(\Omega_j)$$

Méthodes de discrétisation classiques

Méthode des volumes finis

De manière générale, la formulation faible s'écrit

$$\int_{\Omega} \partial_t u \cdot v - F(u) \cdot \partial_x v \, dV + \int_{\partial\Omega} F(u) \cdot v \, n \, dS = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV, \quad \forall v$$

Par additivité de l'intégration, on a

$$\sum_{i=1}^P \int_{\Omega_i} \partial_t u \cdot v_i - \underbrace{F(u) \cdot \partial_x v_i}_{=0} \, dV_i + \int_{\partial\Omega_i} F(u) \cdot \underbrace{v_i}_{=1} \, n_i \, dS_i = \sum_{i=1}^P \int_{\Omega_i} f \cdot v_i \, dV_i$$

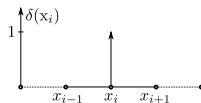
On obtient ainsi la formulation propre aux volumes finis

$$\boxed{\int_{\Omega_i} \partial_t u \, dV_i + \int_{\partial\Omega_i} F(u) \cdot n_i \, dS_i = \int_{\Omega_i} f \, dV_i, \quad \forall i}$$

Conclusion

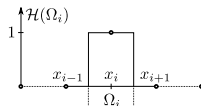
- Différences finies

Distribution de Dirac aux points de collocation (fonctions test)



- Volumes finis

Distribution de Heaviside sur chaque volume (fonctions test et interpolation)



- Éléments finis

Base polynomiale sur chaque élément (fonctions test et interpolation)

