Solutions II

1 Perturbation d'une surface libre

Le système d'équations décrivant l'évolution d'une perturbation sur une surface libre peut s'écrire sous la forme standard

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{u} = (h, v)^{\mathrm{T}}$ et la matrice du système

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \theta^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \mathrm{Fr}^{-1}. \tag{2}$$

Les matrices des valeurs propres, des vecteurs propres ainsi que son inverse s'écrivent respectivement

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1+\theta & 0 \\ 0 & 1-\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1/\theta & -1/\theta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} +\theta & 1 \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1. Le système est hyperbolique quel que soit le nombre de Froude puisque

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \pm \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_*^+. \tag{4}$$

2. Les caractéristiques sont obtenues en trouvant une primitive de la relation

$$\lambda_i \,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

   En faisant apparaître explicitement le nombre de Froude, on obtient

$$\xi = t - \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}-1}x = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$\eta = t - \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}+1}x = \mathrm{const}. \tag{7}$$

   Etant donné que les coefficients sont constants, les invariants de Riemann sont donnés par

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} +\theta h + v \\ -\theta h + v \end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Pour déterminer le comportement d'une perturbation appliquée en $x = \mathrm{x}_0$ à un instant $t = \mathrm{t}_0$, on trace schématiquement deux caractéristiques dans un domaine spatio-temporel (x, t).

   Dans le cas fluvial, la famille de caractéristiques $\xi = \mathrm{const}$ a une pente négative alors que la famille $\eta = \mathrm{const}$ a une pente positive. Le domaine d'influence de la perturbation située en $(x, t) = (\mathrm{x}_0, \mathrm{t}_0)$, représenté en bleu sur la figure 3, s'étend vers l'amont et l'aval. Ainsi, la perturbation se propage dans les deux directions et tout le domaine est affecté après un temps suffisamment long.

   Dans le cas torrentiel, les deux familles de caractéristiques ont une pente positive. Comme on le voit sur la figure 3, le domaine perturbé est emporté par l'écoulement vers l'aval et sa largeur croît avec le temps.

   Ce résultat aurait pu être trouvé par simple interprétation physique du nombre de Froude. En effet, il représente le rapport entre la vitesse de propagation des perturbations $\sqrt{\mathrm{gH}}$ et celle de l'écoulement V. Ainsi, pour un nombre de Froude supérieur à l'unité, toutes les perturbations sont emportées vers l'aval par l'écoulement.

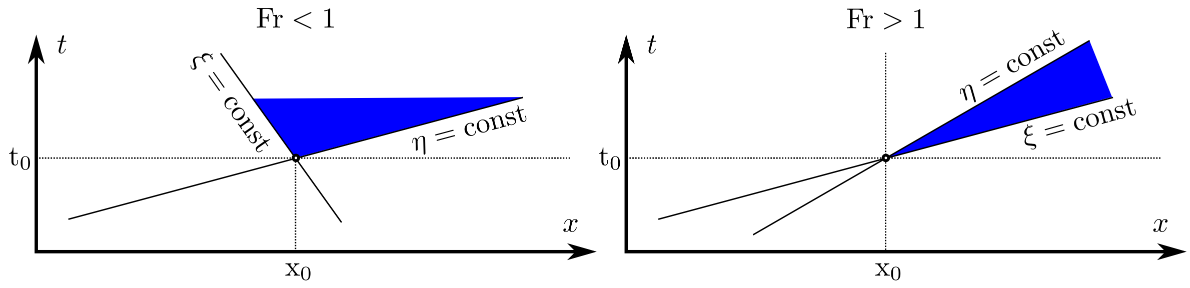

Figure 1: Domaine d'influence d'une perturbation située en $(x,t) = (\mathrm{x}_0, \mathrm{t}_0)$ pour un écoulement fluvial (gauche) et torrentiel (droite).

2 Ecoulement incompressible d'une fluide parfait

Les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{X}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{Y}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$

avec $\boldsymbol{u} = (u, v, p)^{\mathrm{T}}$ ainsi que

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & \alpha \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & v & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \rho^{-1}. \tag{10}$$

La matrice du système sous forme standard est donnée par

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & v/u & \alpha/u \\ v/\alpha & -u/\alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

dont la matrice des valeurs propres s'écrit

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} +\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & +v/u \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ce système d'équations est donc hybride. A l'aide de la relation

$$\lambda_i \, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0, \tag{13}$$

on trouve les trois familles de caractéristiques

$$\mathrm{d}\xi = +\mathrm{i}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0, \tag{14}$$
$$\mathrm{d}\eta = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0, \tag{15}$$
$$\mathrm{d}\zeta = +v\,\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}y = 0. \tag{16}$$

Puis, avec le champ de vitesse $(u, v) = \epsilon(+x, -y)$, on trouve l'équation des caractéristiques

$$\xi = +\mathrm{i}x - y = \mathrm{const}, \tag{17}$$
$$\eta = -\mathrm{i}x - y = \mathrm{const}, \tag{18}$$
$$\zeta = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{const}. \tag{19}$$