METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
M.A. Habisreutinger
Jeudi 29 février 2024

Série II

1 Perturbation d'une surface libre

On considère le système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{Fr}^{-2}\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

qui modélise l'évolution d'une perturbation sur la surface libre d'une couche de fluide non-visqueux de hauteur H se déplaçant à la vitesse V. Les variables h et v représentent la hauteur et la vitesse de cette perturbation. Le nombre de Froude est donné par la relation

$$\mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{\mathrm{gH}}},$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

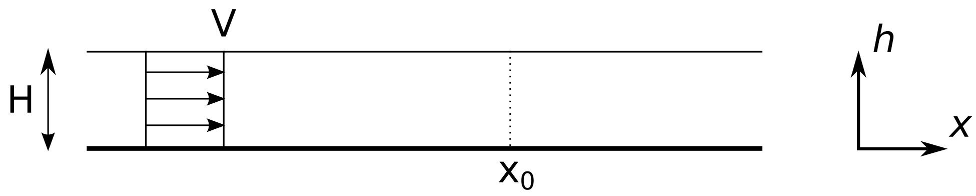

Figure 1: Ecoulement homogène dans une rivière de profondeur constante.

1. Déterminer le caractère mathématique de ce système d'équations en fonction du nombre de Froude.
2. Déterminer les caractéristiques ainsi que les invariants de Riemann pour ce système d'équations.
3. Pour un écoulement fluvial ($\mathrm{Fr} < 1$) et pour un écoulement torrentiel ($\mathrm{Fr} > 1$), décrire le comportement d'une perturbation qui serait appliquée en $x = \mathrm{x}_0$ à un instant $t = \mathrm{t}_0$.

2 Ecoulement incompressible d'une fluide parfait

L'écoulement stationnaire d'un fluide parfait peut être décrit par les équations d'Euler

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

où la densité ρ est constante. Les variables u, v et p représentent respectivement la vitesse selon x, la vitesse selon y et la pression. On demande de déterminer le caractère mathématique ainsi que les caractéristiques de ce système pour le champ de vitesse

$$(u, v) = \epsilon(+x, -y), \qquad \epsilon \in \mathbb{R}.$$