Méthodes de discrétisation en fluides

2. Théorie des équations aux dérivées partielles

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 29 février 2024

Contenu

Systèmes du 1°

Définition

On considère un système de n équations à n inconnues pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_\mathrm{n} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{A}_{\mathrm{n}2} & \dots & \mathrm{A}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_\mathrm{n} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de manière équivalente comme

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

Systèmes du 1°

$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \mathbf{0}$

Découplage

On veut découpler le système pour faire apparaître n équations indépendantes. Pour cela on introduit les nouvelles variables r_i telles que

$$\overbrace{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}}^{\equiv \mathbf{V}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \mathbf{A} \overbrace{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}}^{\equiv \mathbf{V}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{V}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial r_j}$$

Puis en multipliant à gauche par $\mathbf{V}^{-1}$, on obtient

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\equiv \boldsymbol{\Lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{c}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Systèmes du 1°

Découplage

Pour que le nouveau système soit découplé, il faut impérativement que

$$\Lambda_{ij} = [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}]_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

Ainsi, $\mathbf{V}$ doit diagonaliser $\mathbf{A}$. Ceci implique que

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$
$$\mathrm{V}_{ij} = [\mathrm{v}_j]_i$$

Dans ce cas, on obtient les n équations d'advection indépendantes recherchées

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$$

aussi appelées équations de Riemann.

Systèmes du 1°

$\frac{\partial r_i}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$

Courbes caractéristiques et invariants de Riemann

La différentielle totale de r_i s'écrit

$$\mathrm{d}r_i = \frac{\partial r_i}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial r_i}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

En posant $\mathrm{d}r_i = 0$ puis en divisant par $\mathrm{d}x$, on obtient

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$$

En utilisant les équations de Riemann, on a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_i}$$

Systèmes du 1°

Courbes caractéristiques et invariants de Riemann

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=\lambda_i} \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}$$

Les variables r_i sont donc invariantes sur une famille de courbes caractéristiques telle que

$$y - \lambda_i x = \text{const}$$

Les variables r_i sont les invariants de Riemann du système d'équations et ils sont donnés par la relation

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \int \mathbf{V}^{-1}\, \mathbf{d}\boldsymbol{u}}$$

Systèmes du 1°

Classification

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$$

En fonction des valeurs propres de $\mathbf{A}$,

- le système est dit hyperbolique si

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i$$

- le système est dit elliptique si

$$\lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \forall i$$

- le système est dit parabolique (ou hybride) si

$$\begin{cases} \exists i, \lambda_i \in \mathbb{C} \\ \exists j, \lambda_j \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ecoulements idéaux compressibles

Equations de Prandtl-Glauert

$$\begin{aligned}\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) &= 0\\ \partial_t(\rho\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{g}\\ \partial_t(\rho e_0) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho e_0\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}\end{aligned}$$

- Plus d'inconnues que d'équations de conservation
- Introduction d'équations constitutives (modélisation)

Ecoulements idéaux compressibles

Equations de Prandtl-Glauert

$$\boldsymbol{v} = (\mathrm{u}_\infty + u'_x)\ \boldsymbol{e}_x + u'_y\ \boldsymbol{e}_y$$

- Faibles perturbations

$$u'_x,\ u'_y \ll \mathrm{u}_\infty$$

- Ecoulement irrotationnel

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0}$$

- Ecoulement stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

- Fluide parfait

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$$

Ecoulements idéaux compressibles

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

Equations de Prandtl–Glauert

Avec ces hypothèses, les équations de conservation se réduisent à

$$(1-\mathrm{Ma}^2)\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} = 0, \quad \mathrm{Ma} = \frac{\mathrm{u}_\infty}{\mathrm{a}_\infty}$$
$$\frac{\partial u'_y}{\partial x} - \frac{\partial u'_x}{\partial y} = 0$$

où la seconde équation exprime le caractère irrotationel de l'écoulement. Sous forme matricielle, avec $\theta^2 = \mathrm{Ma}^2 - 1$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/\theta^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}}\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecoulements idéaux compressibles

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\theta^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

Equations de Prandtl–Glauert

- Matrice des valeurs propres de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} +1/\theta & 0 \\ 0 & -1/\theta \end{pmatrix}$$

- Matrice des vecteurs propres de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1/\theta & +1/\theta \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -\theta & +1 \\ +\theta & +1 \end{pmatrix}$$

Ecoulements idéaux compressibles

Equations de Prandtl–Glauert

$$\lambda_i = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1/\theta$$
$$\mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}$$
$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -\theta & +1 \\ +\theta & +1 \end{pmatrix}$$

- Invariants de Riemann

$$\boldsymbol{r} = \int \mathbf{V}^{-1}\mathbf{d}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\theta u'_x + u'_y \\ +\theta u'_x + u'_y \end{pmatrix}$$

- Courbes caractéristiques

$$\lambda_i \, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

dont on déduit que

$$\xi = x - \theta y = \mathrm{const}$$
$$\eta = x + \theta y = \mathrm{const}$$

Ecoulements idéaux compressibles

Lien entre classification mathématique et physique

Nous avons vu que les valeurs propres sont données par

$$\lambda_i = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ma}^2 - 1}}$$

Ainsi, lorsque

- $\mathrm{Ma} < 1$: écoulement subsonique, équation elliptique

  Il existe deux familles de caractéristiques complexes conjugées

- $\mathrm{Ma} = 1$: écoulement sonique, équation parabolique

  Il n'existe qu'une seule famille de caractéristiques réelles doubles

- $\mathrm{Ma} > 1$: écoulement supersonique, équation hyperbolique

  Il existe deux familles de caractéristiques réelles

Ecoulements idéaux compressibles

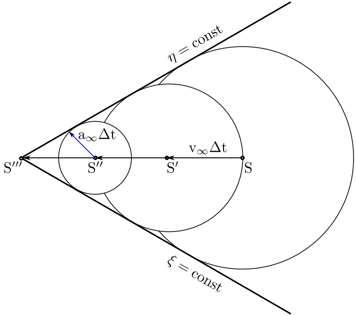
Ecoulement supersonique - Equation hyperbolique

- Caractéristiques

$$\xi = x - \theta y = \text{const}$$
$$\eta = x + \theta y = \text{const}$$

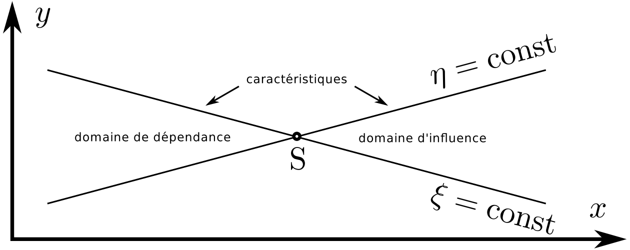
- Invariants de Riemann

$$\pm\theta u'_x + u'_y = \text{const}$$



Ecoulements idéaux compressibles

Ecoulement supersonique - Equation hyperbolique



Ecoulements idéaux compressibles

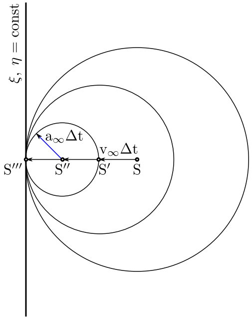
Ecoulement sonique - Equation parabolique

- Caractéristiques

$$\xi = x - \theta y = \text{const}$$
$$\eta = x + \theta y = \text{const}$$

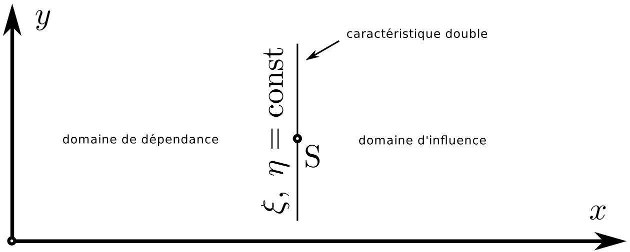
- Invariants de Riemann

$$\pm\theta u'_x + u'_y = \text{const}$$



Ecoulements idéaux compressibles

Ecoulement sonique - Equation parabolique



Ecoulements idéaux compressibles

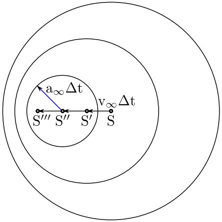
Ecoulement subsonique - Equation elliptique

- Caractéristiques

$$\xi = x - \theta y = \text{const}$$
$$\eta = x + \theta y = \text{const}$$

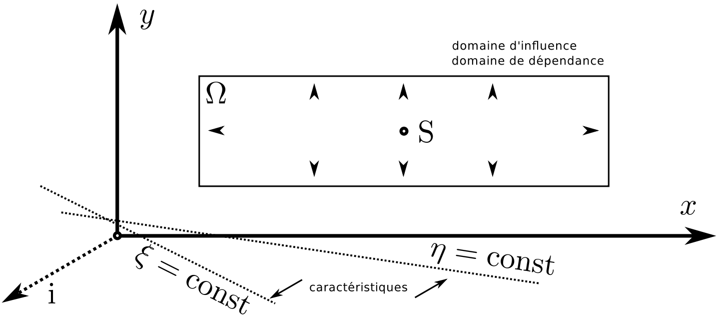
- Invariants de Riemann

$$\pm\theta u'_x + u'_y = \text{const}$$



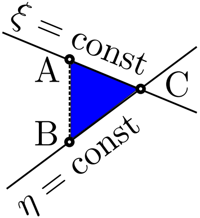
Ecoulements idéaux compressibles

Ecoulement subsonique - Equation elliptique



Conditions aux limites

Equation hyperbolique



Sur $\xi = x - \theta y = \mathrm{const}$, on a

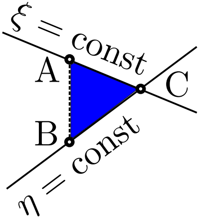
$$-\theta u'_x(\mathrm{A}) + u'_y(\mathrm{A}) = -\theta u'_x(\mathrm{C}) + u'_y(\mathrm{C}) = \mathrm{const}$$

Sur $\eta = x + \theta y = \mathrm{const}$, on a

$$+\theta u'_x(\mathrm{B}) + u'_y(\mathrm{B}) = +\theta u'_x(\mathrm{C}) + u'_y(\mathrm{C}) = \mathrm{const}$$

Conditions aux limites

Equation hyperbolique



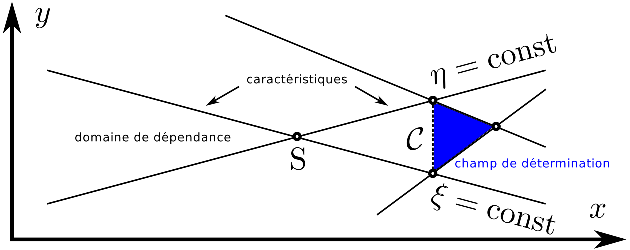
Les grandeurs étant connues sur $\mathcal{C}$, on isole les inconnues au point C

$$u'_x(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}(u'_x(\mathrm{A}) + u'_x(\mathrm{B})) + \frac{\theta}{2}(u'_y(\mathrm{A}) - u'_y(\mathrm{B}))$$
$$u'_y(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}(u'_y(\mathrm{A}) + u'_y(\mathrm{B})) + \frac{\theta}{2}(u'_x(\mathrm{A}) - u'_x(\mathrm{B}))$$

On peut donc déterminer les inconnues dans le triangle ABC en connaissant seulement les valeurs sur $\mathcal{C}$

Conditions aux limites

Equation hyperbolique



- Données (conditions aux limites) nécessaires sur une partie de la frontière
- Correspond à un problème d'évolution

Conditions aux limites

Problème bien posé

- Existence

  La solution existe, et en particulier on a autant d'équations indépendantes que d'inconnues

- Unicité

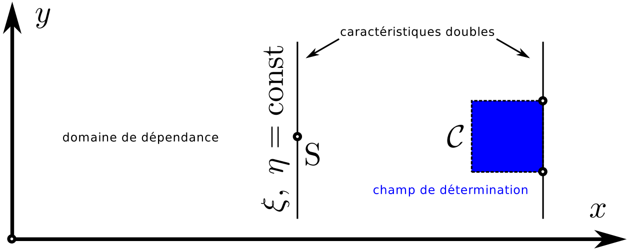
  La solution est uniquement déterminée par les données

- Dépendance

  La solution dépend continûment des données, c'est-à-dire que de faibles modications dans les données produisent de faibles modications dans la solution

Conditions aux limites

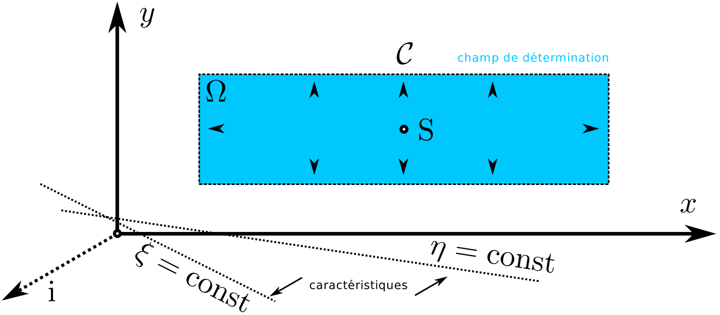
Equation parabolique



- Données (conditions aux limites) nécessaires sur une partie de la frontière
- Correspond à un problème d'évolution

Conditions aux limites

Equation elliptique



- Données (conditions aux limites) nécessaires sur toute la frontière
- Correspond à un problème d'équilibre

Equations aux dérivées partielles du second degré

Définition

On considère l'équation générale

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- Equation aux dérivées partielles du second ordre
- Deux dimensions (x, y)
- x et y peuvent représenter des dimensions spatiales ou temporelles
- On suppose les coefficients α, β, γ non nuls

Equations du 2°

$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$

Problème de Cauchy - Cas particulier

- En connaissant sur $x = \text{const} \overset{e.g.}{=} 0$

$$\underbrace{u(0,y) = f(y)}_{\text{donnée de Cauchy}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''$$

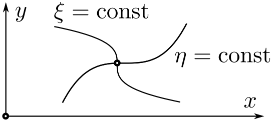
- et en connaissant aussi la dérivée selon x

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y)}_{\text{donnée de Cauchy}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g'$$

- on peut résoudre notre équation au voisinage de $x = \text{const}$ puisque puisque par hypothèse $\alpha \neq 0$

Equations du 2°

Problème de Cauchy - Cas général



En choisissant un changement de coordonnées

$$\xi = \phi_1(x,y), \quad \eta = \phi_2(x,y)$$

dont le jacobien s'écrit

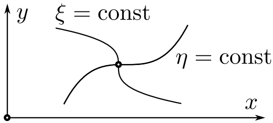
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

et en supposant qu'il soit inversible, c'est-à-dire

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

Equations du 2°

Problème de Cauchy - Cas général



l'équation fondamentale devient

$$\tilde{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$\tilde{\beta} = \alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \gamma\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\tilde{\gamma} = \alpha\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

Equations du 2°

Problème de Cauchy - Cas général

$$\tilde{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

- En connaissant sur une courbe $\xi = \text{const} \overset{e.g.}{=} 0$

$$\underbrace{u(0,\eta) = f(\eta)}_{\text{donnée de Cauchy}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f''$$

- et en connaissant aussi la dérivée selon ξ

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi}(0,\eta) = g(\eta)}_{\text{donnée de Cauchy}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = g'$$

- on peut résoudre notre équation au voisinage de $\xi = \text{const}$ si et seulement si $\tilde{\alpha} \neq 0$

Equations du 2°

Courbes caractéristiques

$$\tilde{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

- Définition

  Les caractéristiques sont des courbes telles que les données de Cauchy sont insuffisantes pour déterminer la solution de l'équation à leur voisinage

- Conséquences

  Sur les caractéristiques, on a les propriétés

$$\tilde{\alpha} = 0$$

$$\mathrm{d}\xi = \partial_x \xi \, \mathrm{d}x + \partial_y \xi \, \mathrm{d}y = 0 \qquad (\xi = \text{const})$$

Equations du 2°

Courbes caractéristiques

$$\tilde{\alpha} = \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$\mathrm{d}\xi = \partial_x \xi \, \mathrm{d}x + \partial_y \xi \, \mathrm{d}y = 0$$

On déduit de ces deux propriétés que

$$\alpha \left(\frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi}\right)^2 + 2\beta \frac{\partial_x \xi \, \partial_y \xi}{(\partial_y \xi)^2} + \gamma = 0, \qquad \frac{\partial_x \xi}{\partial_y \xi} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Ainsi, on obtient

$$\alpha \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2\beta \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \gamma = 0$$

où la quantité $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ représente la pente des courbes caractéristiques

Equations du 2°

Courbes caractéristiques

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$$

$$\alpha \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2\beta \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \gamma = 0$$

En résolvant cette équation, on trouve l'équation des pentes

$$\boxed{(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})\, \mathrm{d}x - \alpha\, \mathrm{d}y = 0}$$

Si les coefficients sont constants, les caractéristiques deviennent des droites de la forme

$$\mathrm{a}x + \mathrm{b}y = \mathrm{const}$$

avec

$$\mathrm{a} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}, \quad \mathrm{b} = -\alpha$$

Equations du 2°

Classification

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$$

$$(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})\, \mathrm{d}x - \alpha\, \mathrm{d}y = 0$$

L'existence de caractéristiques réelles est ainsi liée à la grandeur

$$\boxed{\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma}$$

On a ainsi trois cas possibles

- si $\Delta > 0$, l'équation est dite hyperbolique

  et il existe deux familles de courbes caractéristiques réelles
- si $\Delta = 0$, l'équation est dite parabolique

  et il n'existe qu'une seule famille de courbes caractéristiques réelles doubles
- si $\Delta < 0$, l'équation est dite elliptique

  et il existe deux familles de courbes caractéristiques complexes conjugées

Equations du 2°

Classification - Equations hyperboliques

On considère une équation de type d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mathrm{c}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation est hyperbolique puisque

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = \mathrm{c}^2 > 0, \quad \forall \mathrm{c} \in \mathbb{R}$$

L'équation des pentes donne ainsi deux relations

$$(\beta + \sqrt{\Delta})\ \mathrm{d}x - \alpha\ \mathrm{d}y = +\mathrm{c}\ \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$
$$(\beta - \sqrt{\Delta})\ \mathrm{d}x - \alpha\ \mathrm{d}y = -\mathrm{c}\ \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Equations du 2°

Classification - Equations hyperboliques

$$+c\ \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$
$$-c\ \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

Comme les coefficients sont constants, on en déduit immédiatement l'équation des courbes caractéristiques

$$\xi = +cx - y = \text{const}$$
$$\eta = -cx - y = \text{const}$$

Equations du 2°

Classification - Equations paraboliques

On considère une équation de type diffusion instationnaire

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cette équation est parabolique puisque

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

L'équation des pentes donne ainsi l'unique relation

$$(\beta + \sqrt{\Delta})\ \mathrm{d}x - \alpha\ \mathrm{d}y = +\nu\ \mathrm{d}y = 0$$

Equations du 2°

$+\nu \; \mathrm{d}y = 0$

Classification - Equations paraboliques

Comme les coefficients sont constants, on en déduit immédiatement l'équation de l'unique courbe caractéristique

$$\eta = y = \mathrm{const}$$

Equations du 2°

Classification - Equations elliptiques

On considère une équation de type Poisson

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

Cette équation est elliptique puisque

$$\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma = -\nu^2 < 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

L'équation des pentes donne ainsi deux relations

$$(\beta + \sqrt{\Delta})\ \mathrm{d}x - \alpha\ \mathrm{d}y = +\mathrm{i}\nu\ \mathrm{d}x - \nu\ \mathrm{d}y = 0$$
$$(\beta - \sqrt{\Delta})\ \mathrm{d}x - \alpha\ \mathrm{d}y = -\mathrm{i}\nu\ \mathrm{d}x - \nu\ \mathrm{d}y = 0$$

Equations du 2°

Classification - Equations elliptiques

$$+\mathrm{i}\nu \, \mathrm{d}x - \nu \, \mathrm{d}y = 0$$
$$-\mathrm{i}\nu \, \mathrm{d}x - \nu \, \mathrm{d}y = 0$$

Comme les coefficients sont constants, on en déduit immédiatement l'équation des courbes caractéristiques complexes

$$\xi = +\mathrm{i}x - y = \mathrm{const}$$
$$\eta = -\mathrm{i}x - y = \mathrm{const}$$

Conclusion

La classification mathématique des équations

- est liée à la classification physique des écoulements
- permet de déterminer quelles conditions aux limites sont nécessaires pour que le problème soit bien posé
- nous sera très utile pour établir des méthodes de discrétisation appropriées

Références

- *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant, D. Hilbert, Wiley
- *Dynamique des fluides*, I. Ryhming, PPUR, 1991