METHODES DE DISCRETISATION EN FLUIDES
Marc Habisreutinger
Jeudi 22 février 2024

Solutions I

1 Relations de dispersion

En partant de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{c}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \mathrm{c} \in \mathbb{R},$$

on choisit une solution de type onde sous la forme

$$u(x,t) = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)},$$

avec û l'amplitude, k le nombre d'onde et ω la pulsation. On en déduit facilement que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\mathrm{k}^2 \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$(\omega^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{k}^2)\hat{\mathrm{u}} = 0.$$

Etant donné qu'on considère des solutions d'amplitude non-nulle, on obtient la relation de dispersion

$$\boxed{\omega = \pm \mathrm{ck},}$$

ce qui permet de déterminer la vitesse de phase

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{k}} = \pm \mathrm{c}.$$

On a donc une onde progressive et une onde rétrograde qui se propagent à la vitesse c quel que soit leur nombre d'onde (milieu non-dispersif). Dans le cas de l'équation d'advection, la propagation ne se fait que dans la direction positive.

2 Algèbre linéaire

Les valeurs propres λ et vecteurs propres $\mathbf{v}$ de la matrice $\mathbf{A}$ sont liés par la relation

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

dont on déduit que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Les valeurs propres sont donc solutions de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,$$

dont on déduit que

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

A partir de ces valeurs, on détermine la base des vecteurs propres

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des constantes arbitraires de normalisation. La matrice des vecteurs propres qui diagonalise $\mathbf{A}$ s'écrit $[\mathbf{V}]_{ij} = [\mathbf{v}_j]_i$. Dans ce cas, on obtient

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -2\alpha & +\beta & 0 \\ +\alpha & 0 & +\gamma \\ +\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V},$$

où $[\mathbf{\Lambda}]_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, quelles que soient les constantes de normalisation.