Méthodes de discrétisation en fluides

1. Introduction

Marc A. Habisreutinger

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 22 février 2024

Informations pratiques

- Marc A. Habisreutinger

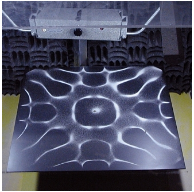
Geste Engineering SA, Rue de la Gare de Triage 5, 1020 Renens

marc-antoine.habisreutinger@epfl.ch

- Site moodle du cours

http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=249

Objectif du cours



$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \kappa \cdot \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu\, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

équation des ondes

équation d'advection-diffusion

$+$

contrainte d'incompressibilité

Organisation du cours

Evaluation et enseignement

1. Forme de l'enseignement
   - 13 séances de cours avec exercices et solutions
   - 5 laboratoires (programation en matlab ou python)
2. Forme de l'évaluation
   - 1 examen écrit (*80% de l'évaluation*)
   - 1 mini-projet (*20% de l'évaluation*)

Contenu

Simulation en mécanique des fluides

Quelques applications

- **Mécanique des fluides fondamentale**

  Instabilités, turbulence, microfluidique, ...

- **Physique des plasmas**

  Confinement magnétique pour la fusion nucléaire, ...

- **Géophysique**

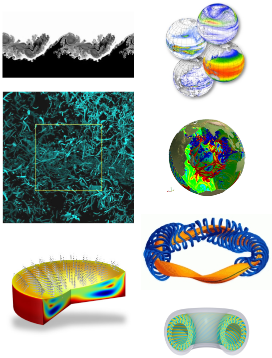
  Volcanologie, sysmique, pollution, ...

- **Météorologie**

  Prévisions à court et long terme (climatologie), ...

- **Risques naturels**

  Avalanches, glissements de terrain, ...



Simulation en mécanique des fluides

Quelques applications

- **Transports**

  Automobile, aviation, maritime, ferroviaire . . .

- **Chimie**

  Ecoulements réactifs, combustion, pharmaceutiques, . . .

- **Agro-alimentaire**

  Procédés de production, . . .

- **Bio-médical**

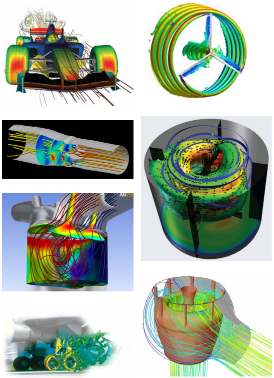
  Valves cardiaques, sténoses, . . .

- **Energie**

  Turbomachines thermiques/hydrauliques, éoliennes, . . .

- **Industrie pétrolière**

  Ecoulements en milieux poreux, transport de sédiments, . . .



Geste Engineering SA

Activités liées à la mécanique des fluides

- Simulations aérodynamiques
- Sécurité et confort tympanique des voyageurs
- Stratégies d'évacuation et de désenfumage
- Dimensionnement des systèmes de contrôle thermique
- Etudes aéro-thermodynamiques

M2 Lausanne

Métro du Grand-Paris

Ligne ferroviaire Lyon-Turin

Simulation en mécanique des fluides

Intérêts

La simulation numérique

- offre une alternative aux approches analytiques pour résoudre des équations complexes dans des géométries complexes
- offre une alternative lorsque l'expérimentation est difficile, trop coûteuse ou impossible
- donne accès à une information plus détaillée que l'expérimentation
- permet de réaliser rapidement des études paramétriques (prototypage virtuel)

Simulation en mécanique des fluides

Dangers

La simulation numérique

- n'est pas un remplacement de l'expérimentation ou de la théorie, mais un outil complémentaire (comparaison et validation)
- n'est pas un remplacement de la connaissance en ingénierie et en physique
- ne donne pas de résultats fiables sans efforts et sans expertise

Simulation en mécanique des fluides

Démarche générale

1. Modélisation (physique)

   Développement d'un modèle mathématique décrivant le comportement physique d'un système

2. Résolution des équations (analyse numérique)

   Utilisation d'algorithmes d'analyse numérique pour obtenir une version discrète du modèle

3. Programmation et exécution des algorithmes (informatique)

   Conversion de la forme discrète en logiciel (codage)

4. Interprétation et exploitation des résultats (ingénierie, expertise)

   Comparaison avec la théorie et l'expérience, exploitation des résultats pour le développement d'une application

Simulation en mécanique des fluides

Compétences et objectifs de ce cours

- Evaluer la précision des résultats numériques en fonction des choix des méthodes et paramètres de simulation.
- Analyser des solutions numériques et identifier les inconsistances par rapport à la réalité physique.
- Comprendre et appliquer les concepts de la vérification et de la validation.
- Comprendre les bases de la programmation pour développer un logiciel structuré en utilisant un langage de programmation tel que C++, fortran ou matlab.
- Comprendre le fonctionnement des logiciels de simulation utilisés dans l'industrie.

Equations fondamentales

Equation de conservation de la masse

$$\mathrm{m} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \, dV = \mathrm{const}$$

- Formulation matérielle

$$\overbrace{\frac{d}{dt}}^{\text{variation}} \underbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \, dV}_{\text{masse}} = 0$$

Equations fondamentales

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \; dV = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f} \; dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \boldsymbol{f} \; dV + \int_{\boldsymbol{\partial\Omega}} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; dS$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \; dV = \int_{\boldsymbol{\partial\Omega}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \; dS$$

Equation de conservation de la masse

- Formulation spatiale

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \rho \; dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; dS = 0$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \; dV = 0$$

- Formulation locale

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Equations fondamentales

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{m}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{f} = \mathrm{m}\boldsymbol{a}$$

- Formulation matérielle

$$\overbrace{\frac{d}{dt}}^{\text{variation}} \underbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{v} \, dV}_{\text{quantité de mouvement}} = \overbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g} \, dV}^{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial \boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \, dS}_{\text{forces surfaciques}}$$

Equations fondamentales

Conservation quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{v}\ dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g}\ dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\ dS$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f}\ dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \boldsymbol{f}\ dV + \int_{\boldsymbol{\partial\Omega}} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ dS$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\ dV = \int_{\boldsymbol{\partial\Omega}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ dS$$

- Formulation spatiale

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t(\rho\boldsymbol{v})\ dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ dS = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho\boldsymbol{g}\ dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\ dS$$

- Formulation locale

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

Equations fondamentales

Equation de conservation de l'énergie

$$\underbrace{e_0}_{\text{énergie}} = \overbrace{e}^{\text{interne}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{cinétique}}$$

- Formulation matérielle

$$\overbrace{\frac{d}{dt}}^{\text{variation}} \underbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho e_0 \, dV}_{\text{énergie}} = \overbrace{\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} \, dV}^{\text{puissance volumique}} + \underbrace{\int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v} \, dS}_{\text{puissance surfacique}} + \overbrace{\int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n} \, dS}^{\text{échanges}}$$

Equations fond.

Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho e_0 \; dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} \; dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v} \; dS + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n} \; dS$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f} \; dV = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \boldsymbol{f} \; dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \; dS$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} \; dV = \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} \; dS$$

- Formulation spatiale

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t(\rho e_0) \; dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \rho e_0 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \; dS = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} \; dV + \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n} \; dS$$

- Formulation locale

$$\partial_t(\rho e_0) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho e_0 \boldsymbol{v}) = \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}$$

Equations fondamentales

Equations de conservation

Les trois équations de conservation s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{g} \\ \partial_t (\rho e_0) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho e_0 \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\phi} \end{aligned}$$

- Plus d'inconnues que d'équations de conservation
- Introduction d'équations constitutives (modélisation)

Equations fondamentales

Modèles constitutifs pour les gaz parfaits

- Equation d'état des gaz parfaits

$$p = \rho \mathrm{r} T$$

- Relation thermodynamique des gaz parfaits

$$e = \mathrm{c}_v T$$

- Loi de Fourier

$$\boldsymbol{\phi} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T$$

- Fluide visqueux newtonien

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \underbrace{\mu \overbrace{\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)}^{\equiv 2\boldsymbol{D}}}_{\equiv \boldsymbol{\tau}} + \eta \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}$$

Equations fondamentales

Equations de Navier–Stokes, fluides visqueux Newtoniens

En injectant les relations constitutives dans les équations de conservation, on obtient

$$\overbrace{\partial_t \rho}^{\text{variation}} + \overbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})}^{\text{accumulation}} = 0$$

$$\rho(\underbrace{\partial_t \boldsymbol{v}}_{\text{variation}} + \overbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}}^{\text{advection}}) = \underbrace{-\boldsymbol{\nabla} p}_{\text{source}} + \overbrace{\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}}^{\text{diffusion}} + \underbrace{\rho \boldsymbol{g}}_{\text{source}}$$

$$\rho c_{\mathrm{v}}(\underbrace{\partial_t T}_{\text{variation}} + \overbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T}^{\text{advection}}) = \underbrace{2\mu\, \boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}}_{\text{source}} + \overbrace{\lambda \boldsymbol{\nabla}^2 T}^{\text{diffusion}}$$

Equations fondamentales

Equations de Navier–Stokes, fluides visqueux Newtoniens

Si on suppose maintenant que l'écoulement est isotherme et incompressible, *i.e.*

$$T,\ \rho = \text{const}$$

les équations précédentes se simplifient sous la forme

$$\overbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}}^{\text{contrainte}} = 0$$

$$\rho(\underbrace{\partial_t \boldsymbol{v}}_{\text{variation}} + \overbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}}^{\text{advection}}) = \underbrace{-\boldsymbol{\nabla} p}_{\text{mult. Lagrange}} + \overbrace{\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v}}^{\text{diffusion}} + \underbrace{\rho \boldsymbol{g}}_{\text{source}}$$

La pression n'obéit plus à l'équation des gaz parfaits mais devient un multiplicateur de Lagrange permettant de satisfaire l'incompressibilité.

Equations fondamentales

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
$$\rho(\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{g}$$

Equation d'advection-diffusion

- Forme générique

$$\overbrace{\partial_t u}^{\text{variation}} - \underbrace{\nu \nabla^2 u}_{\text{diffusion}} + \overbrace{\mathbf{c} \cdot \nabla u}^{\text{advection}} = \underbrace{f}_{\text{source}}$$

- En une seule dimension spatiale

$$\boxed{\overbrace{\partial_t u}^{\text{variation}} - \underbrace{\nu\, \partial_{xx}^2 u}_{\text{diffusion}} + \overbrace{\mathrm{c}\, \partial_x u}^{\text{advection}} = \underbrace{f}_{\text{source}}}$$

Poser le problème

Domaine - Opérateur differentiel - Terme source - Conditions aux limites

On considère l'équation de diffusion stationnaire en une dimension spatiale

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \Omega = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ u(\mathrm{a}) = 0, \ u(\mathrm{b}) = 0 \end{cases}$$

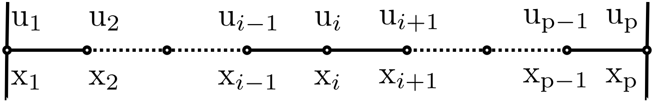
avec f donné, $\nu \in \mathbb{R}$ et la solution

$$\boxed{u \in C^2(\Omega)}$$

Construire un maillage

Noeuds - Connectivité

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \Omega = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ u(\mathrm{a}) = 0,\; u(\mathrm{b}) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\nu \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \mathrm{f}_i, \quad i = 2, \ldots, \mathrm{p}-1 \\ \mathrm{u}_1 = 0,\; \mathrm{u}_\mathrm{p} = 0 \end{cases}$$

Utiliser une méthode numérique

Différences finies

Pour approcher la dérivée seconde, on écrit les séries de Taylor

$$\mathrm{u}_{i+1} = \mathrm{u}_i + \frac{h}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)$$
$$\mathrm{u}_{i-1} = \mathrm{u}_i - \frac{h}{1!}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}_i} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} - \frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)$$

dont la somme permet d'obtenir

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\mathrm{x}_i} = \frac{\mathrm{u}_{i+1} - 2\mathrm{u}_i + \mathrm{u}_{i-1}}{h^2} \underbrace{- \frac{2h^2}{4!}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{\mathrm{x}_i} \pm \mathcal{O}(h^4)}_{\epsilon = \mathcal{O}(h^2)}$$

Méthode numérique

$$-\nu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i} = f_i$$

Différences finies

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

On obtient ainsi le système d'équations algébriques $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$

- exprimé sous forme indicielle

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i = 2, \ldots, p-1 \\ u_1 = 0,\ u_p = 0 \end{cases}$$

- exprimé sous forme matricielle

$$\underbrace{-\frac{\nu}{h^2}\begin{pmatrix} +1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & +1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ u_i \\ \cdot \\ u_p \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ f_i \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Discrétisation

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i} \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Principe

- Le problème faisant intervenir une equation aux dérivées partielles linéaire devient un système d'equations algébriques linéaires

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \Omega = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \\ u(\mathrm{a}) = 0, \; u(\mathrm{b}) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \qquad \mathbf{Au} = \mathbf{b}$$

- Une étape importante est l'expression de l'opérateur différentiel (ici la dérivée seconde) sous forme discrète

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{D}_{xx} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} ? & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & +1 & -2 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & ? \end{pmatrix}$$

Discrétisation

Principe

- Gradient $\boldsymbol{\nabla}(.)$ $\rightarrow$ $$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & ? & ? & ? & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- Divergence $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ $\rightarrow$ $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & ? & ? & ? & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- Rotationel $\boldsymbol{\nabla}\times$ $\rightarrow$ $$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & ? & ? & ? & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- Laplacien $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}(.)$ $\rightarrow$ $$\mathbf{L} = \mathbf{DG}$$

Equations aux dérivées partielles

Exemples (1/2)

- Navier

  Mécanique des solides

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = 0$$

- Navier-Stokes

  Mécanique des fluides

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

- D'Alembert

  Acoustique, éléctromagnetisme, mécanique des fluides et des solides

$$\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mu^{-1} \boldsymbol{\nabla} u) = f$$

Equations aux dérivées partielles

Exemples (2/2)

- Maxwell

  Electromagnetisme

$$\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times (\mu^{-1} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{f}$$

- Darcy

  Mécanique des fluides (milieux poreux)

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mu \boldsymbol{\nabla} p) = f$$

- Schrodinger

  Mécanique quantique

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \boldsymbol{\nabla}^2 \psi + V\psi = 0$$

Théorie des ondes

Définition

On considère l'onde

$$u(x,t) = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,t)}, \qquad \hat{\mathrm{u}} \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

avec $\phi(x,t)$ la phase et les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mathrm{i}\hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathrm{i}\hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

On obtient ainsi la différentielle totale

$$\mathrm{d}u = \mathrm{i}\hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{i}u\ \mathrm{d}\phi$$

Théorie des ondes

Relation de dispersion et vitesse de phase

On définit la phase

$$\phi = \mathrm{k}x - \omega(\mathrm{k})t \qquad \mathrm{k}, \omega \in \mathbb{C}$$

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t = \mathrm{k}\mathrm{d}x - \omega(\mathrm{k})\mathrm{d}t$$

- Relation de dispersion

  Relation liant la pulsation au nombre d'onde

$$\omega = \omega(\mathrm{k})$$

- Vitesse de phase

  Vitesse de propagation de l'onde (célérité)

$$\mathrm{d}u = \mathrm{i}u\,\mathrm{d}\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(\mathrm{k})}{\mathrm{k}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega(\mathrm{k})}{\mathrm{Re}(\mathrm{k})}}$$

Théorie des ondes

$$u = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$
$$\phi = \mathrm{k}x - \omega t$$

Relation de dispersion et vitesse de phase

On considère la propagation d'une onde

$$u = \hat{\mathrm{u}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$$

dont la relation de dispersion s'écrit

$$\omega(\mathrm{k}) = \mathrm{ck}, \qquad \mathrm{c} \in \mathbb{R}$$

On a donc la vitesse de phase

$$\boxed{\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re(k)}} = \mathrm{c}} = \mathrm{const}$$

Théorie des ondes

$$u = \hat{u}\ e^{i\phi}$$
$$\phi = kx - \omega t$$

Relation de dispersion et vitesse de phase

On considère maintenant la propagation d'une onde

$$u = \hat{u}\ e^{i(kx - \omega t)}$$

dont la relation de dispersion s'écrit

$$\omega(k) = ck^2$$

On a donc la vitesse de phase

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k)} = ck} \neq \text{const}$$

Théorie des ondes

Relation de dispersion et vitesse de phase

- Milieu non-dispersif

  Toutes les ondes se déplacent à la même vitesse quelle que soit leur nombre d'onde

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega(\mathrm{k})}{\mathrm{Re}(\mathrm{k})} = \mathrm{const}$$

- Milieu dispersif

  La vitesse de propagation dépend du nombre d'onde

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega(\mathrm{k})}{\mathrm{Re}(\mathrm{k})} \neq \mathrm{const}$$

Théorie des ondes

Equation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{c}\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

En considérant une solution de la forme $u = \hat{\mathrm{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$, on obtient

$$(-\mathrm{i}\omega + \mathrm{c}\ \mathrm{ik})\hat{\mathrm{u}} = 0$$

dont on déduit la relation de dispersion et la vitesse de phase

$$\omega = \mathrm{ck}$$

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\mathrm{k})} = \mathrm{c}$$

Théorie des ondes

Equation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En considérant une solution de la forme $u = \hat{\mathrm{u}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{k}x - \omega t)}$, on obtient

$$(-\mathrm{i}\omega + \nu \mathrm{k}^2)\hat{\mathrm{u}} = 0$$

dont on déduit la relation de dispersion et la vitesse de phase

$$\omega = -\mathrm{i}\nu \mathrm{k}^2$$

$$\mathrm{v}_\phi = \frac{\omega}{\mathrm{Re(k)}} = -\mathrm{i}\nu \mathrm{Re(k)}$$

Références

- *Dynamique des fluides*, I. Ryhming, PPUR, 1991