Méthodes de discrétisation en fluides

8. Problèmes multi-dimensionnels

Marc A. Habisreutinger

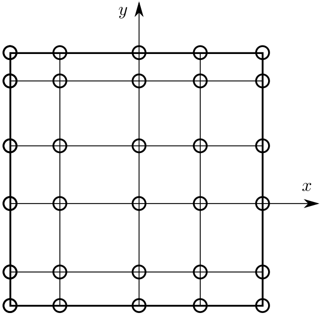
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section de génie mécanique, CH-1015 Lausanne

Jeudi 11 avril 2023

Contenu

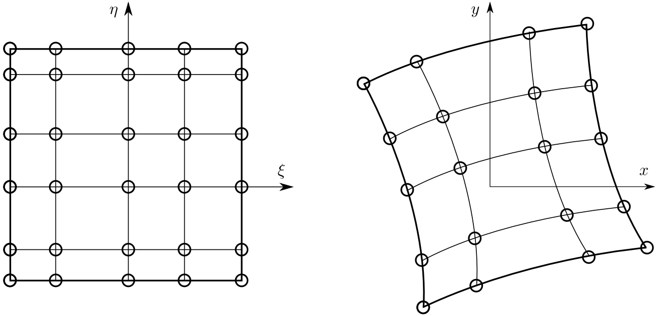
Complexité géométrique

Domaines mono-dimensionnels tensorisés



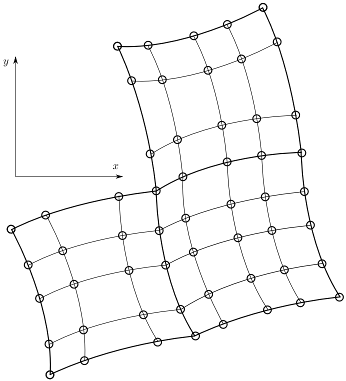
Complexité géométrique

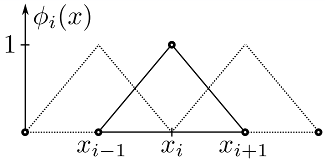
Domaines tensorisés déformés



Complexité géométrique

Décomposition en sous-domaines tensorisés déformés





Interpolation

Cas mono-dimensionnel

- Base d'interpolation

$$\mathbb{B} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{\mathrm{p}}, \ldots\}$$

- Expression dans la base

$$\underbrace{u(x,t)}_{\text{esp. physique}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \overbrace{\underline{\mathrm{u}}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \phi_j(x) + \underbrace{\tau(x,t,\mathrm{p})}_{\text{troncature à l'ordre p}}$$

Interpolation

$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x) + \tau(x,t,\mathrm{p})$

Cas mono-dimensionnel

- Approximation

  Troncature de la série

$$u(x,t) \simeq u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$$

- Convergence

$$\lim_{\mathrm{p}\to\infty} \tau(x,t,\mathrm{p}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\mathrm{p}\to\infty} u(x,t) - u_h(x,t) = 0$$

Interpolation

$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$

Cas mono-dimensionnel

- Noeuds de collocation

$$\mathbb{X} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{p}\}, \quad \mathrm{x}_i \in \Omega$$

- Valeurs nodales

$$\overbrace{\mathrm{u}_i(t)}^{\text{esp. nodal}} = u_h(\mathrm{x}_i, t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \overbrace{\underline{\mathrm{u}}_j(t)}^{\text{esp. modal}} \phi_j(\mathrm{x}_i)$$

$$\underbrace{\mathbf{u}}_{\text{nodal}} = \mathbf{\Phi} \underbrace{\underline{\mathbf{u}}}_{\text{modal}}, \quad [\mathbf{\Phi}]_{ij} = \phi_j(\mathrm{x}_i)$$

- Opérateur de transformation

espace nodal $\leftrightarrow$ espace modal

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{u} \equiv \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$$

Interpolation

Cas mono-dimensionnel

$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$

- Approximation

$$\partial_x u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\ \mathrm{d}_x\phi_j(x)$$

- Valeurs nodales

$$\mathrm{u}_{i,x}(t) = \partial_x u_h(x,t)|_{x=\mathrm{x}_i} = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\ \mathrm{d}_x\phi_j|_{x=\mathrm{x}_i}$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}, \quad [\mathbf{\Phi}_{,x}]_{ij} = \mathrm{d}_x\phi_j|_{x=\mathrm{x}_i}$$

Interpolation

Cas mono-dimensionnel

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{u} \equiv \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$$

- Opérateurs nodaux et modaux

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{D}\ \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}}\ \mathbf{u}$$
$$\underline{\mathbf{u}}_{,x} = \underline{\mathbf{D}}\ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{u}}$$

- Relations entre opérateurs nodaux et modaux

Valables pour un opérateur discret quelconque

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}} = \overbrace{\mathbf{\Phi}\underline{\mathbf{\Phi}}}^{=\mathbf{I}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underline{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\ \underline{\mathbf{D}}\ \underline{\mathbf{\Phi}}$$
$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}_{,x}\underbrace{\underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}}_{=\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\ \mathbf{D}\ \mathbf{\Phi}$$

Interpolation

$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{p}} \underline{\mathrm{u}}_j(t)\phi_j(x)$

Cas bi-dimensionnel

- Approximation

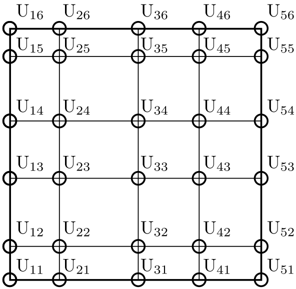
$$u_h(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\mathrm{p}_x}\sum_{l=1}^{\mathrm{p}_y} \underline{\mathrm{U}}_{kl}(t)\phi_k^{(x)}(x)\phi_l^{(y)}(y)$$

- Représentation vectorielle

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}} &\equiv (\underline{\mathrm{u}}_1, \underline{\mathrm{u}}_2, \dots, \underline{\mathrm{u}}_n, \dots, \underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{p}})^{\mathrm{T}} \\ &\equiv (\underline{\mathrm{U}}_{11}, \underline{\mathrm{U}}_{21}, \dots, \underline{\mathrm{U}}_{kl}, \dots, \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{p}_x\mathrm{p}_y})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} n &= k + \mathrm{p}_x(l-1) \\ \mathrm{p} &= \mathrm{p}_x\mathrm{p}_y \end{aligned}$$



Interpolation

Cas bi-dimensionnel

- Noeuds de collocation

$$\mathbb{X} = \{(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)\}, \quad (i,j) \in \{1, \ldots, \mathrm{p}_x\} \times \{1, \ldots, \mathrm{p}_y\}$$

- Valeurs nodales

$$\mathrm{U}_{ij}(t) = u_h(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_j, t) = \sum_{k=1}^{\mathrm{p}_x} \sum_{l=1}^{\mathrm{p}_y} \underline{\mathrm{U}}_{kl}(t) \phi_k^{(x)}(\mathrm{x}_i) \phi_l^{(y)}(\mathrm{y}_j)$$

Avec sommation sur indices répétés, ceci s'écrit

$$\mathrm{U}_{ij} = \underline{\mathrm{U}}_{kl} [\mathbf{\Phi}_x]_{ik} \, [\mathbf{\Phi}_y]_{jl} = [\mathbf{\Phi}_x]_{ik} \underline{\mathrm{U}}_{kl} [\mathbf{\Phi}_y^{\mathrm{T}}]_{lj}$$

où

$$[\mathbf{\Phi}_x]_{ik} = \phi_k^{(x)}(\mathrm{x}_i), \quad [\mathbf{\Phi}_y]_{jl} = \phi_l^{(y)}(\mathrm{y}_j)$$

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

$\mathrm{U}_{ij} = [\mathbf{\Phi}_x]_{ik}\underline{\mathrm{U}}_{kl}[\mathbf{\Phi}_y^{\mathrm{T}}]_{lj}$

On a ainsi les relations de transformation et leur inverse

- *sous forme factorisée*

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_x \underline{\mathbf{U}}\ \mathbf{\Phi}_y^{\mathrm{T}}$$
$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_x \mathbf{U}\ \underline{\mathbf{\Phi}}_y^{\mathrm{T}}$$

- *sous forme assemblée*

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\underline{\mathbf{u}}$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$$

avec les opérateurs de transformation assemblés

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_y \otimes \mathbf{\Phi}_x$$
$$\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_y \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_x$$

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

Soient les matrices réelles

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$$
$$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}\times\mathrm{l}}$$
$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\mathrm{km}\times\mathrm{ln}}$$

On appelle produit de Kronecker, l'opération telle que

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{11}\mathbf{A} & \mathrm{B}_{12}\mathbf{A} & \dots & \mathrm{B}_{1\mathrm{l}}\mathbf{A} \\ \mathrm{B}_{21}\mathbf{A} & \mathrm{B}_{22}\mathbf{A} & \dots & \mathrm{B}_{2\mathrm{l}}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{B}_{\mathrm{k}1}\mathbf{A} & \mathrm{B}_{\mathrm{k}2}\mathbf{A} & \dots & \mathrm{B}_{\mathrm{kl}}\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

Sous forme indicielle, le produit de Kronecker s'écrit

$$[\,\mathbf{C}\,]_{ij} = [\,\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}\,]_{ij} = \mathrm{B}_{pq}\mathrm{A}_{rs}, \qquad \begin{array}{l} i = r + (p-1)\mathrm{m} \\ j = s + (q-1)\mathrm{n} \end{array}$$

et le produit matrice-vecteur peut être effectué

- *sous forme factorisée*

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\ \mathbf{V}\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

- *sous forme assemblée*

$$\mathbf{w} = \underbrace{(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})}_{=\,\mathbf{C}}\mathbf{v}$$

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_x \underline{\mathbf{U}} \mathbf{\Phi}_y^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{D} = \mathbf{\Phi}_{,x} \underline{\mathbf{\Phi}}$$
$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_x \mathbf{U} \underline{\mathbf{\Phi}}_y^{\mathrm{T}} \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}_{,x}$$

Les dérivées nodales s'écrivent

$$\mathbf{U}_{,x} = \mathbf{\Phi}_{x,x} \underline{\mathbf{U}}\ \mathbf{\Phi}_y^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{U}_{,y} = \mathbf{\Phi}_x \underline{\mathbf{U}}\ \mathbf{\Phi}_{y,y}^{\mathrm{T}}$$

Avec la relation de transformation inverse, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{,x} &= \mathbf{\Phi}_{x,x} \underline{\mathbf{\Phi}}_x \mathbf{U} (\overbrace{\mathbf{\Phi}_y \underline{\mathbf{\Phi}}_y}^{=\mathbf{I}_y})^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{D}_x \mathbf{U}\ \mathbf{I}_y^{\mathrm{T}}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{U}_{,y} &= \overbrace{\mathbf{\Phi}_x \underline{\mathbf{\Phi}}_x}^{=\mathbf{I}_x} \mathbf{U} (\mathbf{\Phi}_{y,y} \underline{\mathbf{\Phi}}_y)^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I}_x \mathbf{U}\ \mathbf{D}_y^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

Ceci s'écrit

- *sous forme factorisée*

$$\mathbf{U}_{,x} = \mathbf{D}_x \mathbf{U}\ \mathbf{I}_y^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{U}_{,y} = \mathbf{I}_x \mathbf{U}\ \mathbf{D}_y^{\mathrm{T}}$$

- *sous forme assemblée*

$$\mathbf{u}_{,x} = \overline{\mathbf{D}}_x \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u}_{,y} = \overline{\mathbf{D}}_y \mathbf{u}$$

avec les opérateurs de dérivation assemblés

$$\overline{\mathbf{D}}_x = \mathbf{I}_y \otimes \mathbf{D}_x$$
$$\overline{\mathbf{D}}_y = \mathbf{D}_y \otimes \mathbf{I}_x$$

Interpolation

$\overline{\mathbf{D}}_x = \mathbf{I}_y \otimes \mathbf{D}_x$

Cas bi-dimensionnel

$$\mathbf{u}_{,x} = \overline{\mathbf{D}}_x \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x & & & \\ & \mathbf{D}_x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_\mathrm{p} \end{pmatrix}$$

- Cout de stockage de la matrice assemblée $\mathcal{O}(\mathrm{p}_i^4)$
- Cout du produit matrice-vecteur $\mathcal{O}(\mathrm{p}_i^4)$
- Le stockage morse de la matrice assemblée est impératif

Interpolation

Cas bi-dimensionnel

$$\mathbf{U}_{,x} = \mathbf{D}_x \mathbf{U}\, \mathbf{I}_y^{\mathrm{T}}$$

- Cout de stockage de la matrice mono-dimensionnelle $\mathcal{O}(\mathrm{p}_i^2)$
- Cout du produit matrice-matrice $\mathcal{O}(\mathrm{p}_i^3)$
- Possibilité de stockage morse de la matrice mono-dimensionnelle

efficace si cette matrice est creuse, ce qui est le cas pour les méthodes d'ordre bas

Interpolation

Cas tri-dimensionnel

En trois dimensions, les opérateurs de transformation assemblés deviennent

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_z \otimes \mathbf{\Phi}_y \otimes \mathbf{\Phi}_x$$
$$\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_z \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_y \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_x$$

et les opérateurs de dérivation assemblés s'écrivent

$$\overline{\mathbf{D}}_x = \mathbf{I}_z \otimes \mathbf{I}_y \otimes \mathbf{D}_x$$
$$\overline{\mathbf{D}}_y = \mathbf{I}_z \otimes \mathbf{D}_y \otimes \mathbf{I}_x$$
$$\overline{\mathbf{D}}_z = \mathbf{D}_z \otimes \mathbf{I}_y \otimes \mathbf{I}_x$$

Interpolation

$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\underline{\mathbf{u}}$

$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{u}$

Cas n-dimensionnel

En n-dimensions, les opérateurs de transformation assemblés deviennent

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{\Phi}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{\Phi}_{x_2} \otimes \mathbf{\Phi}_{x_1}$$
$$\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_{x_2} \otimes \underline{\mathbf{\Phi}}_{x_1}$$

et les opérateurs de dérivation assemblés s'écrivent

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{D}}_{x_1} &= \mathbf{I}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_2} \otimes \mathbf{D}_{x_1} \\
\overline{\mathbf{D}}_{x_2} &= \mathbf{I}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{D}_{x_2} \otimes \mathbf{I}_{x_1} \\
&\ldots \\
\overline{\mathbf{D}}_{x_k} &= \mathbf{I}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{D}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_2} \otimes \mathbf{I}_{x_1} \\
&\ldots \\
\overline{\mathbf{D}}_{x_n} &= \mathbf{D}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_{x_2} \otimes \mathbf{I}_{x_1}
\end{aligned}$$

Tensorisation

$u_h(x, y, t) = \mathrm{U}_{kl}(t)\phi_k^{(x)}(x)\phi_l^{(y)}(y)$

Cas bi-dimensionnel

- Formulation faible

$$(\partial_t u, v) + \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v)$$

- Fonctions test dans l'espace d'interpolation

$$v_h(x, y, t) = \mathrm{V}_{ij}(t)\phi_i^{(x)}(x)\phi_j^{(y)}(y)$$

- Approximation

$$(\partial_t u_h, v_h) + \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Tensorisation

Cas bi-dimensionnel

$$(\partial_t u_h, v_h) + \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h)$$
$$u_h(x, y, t) = \mathrm{U}_{kl}(t)\phi_k^{(x)}(x)\phi_l^{(y)}(y)$$
$$v_h(x, y, t) = \mathrm{V}_{ij}(t)\phi_i^{(x)}(x)\phi_j^{(y)}(y)$$

Avec ces approximations, les équations semi-discrètes deviennent

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{U}}_{kl}(\phi_k^{(x)}\phi_l^{(y)}, \phi_i^{(x)}\phi_j^{(y)}) + \mathrm{U}_{kl}\mathcal{A}(\phi_k^{(x)}\phi_l^{(y)}, \phi_i^{(x)}\phi_j^{(y)}) \\ = \mathrm{F}_{kl}(\phi_k^{(x)}\phi_l^{(y)}, \phi_i^{(x)}\phi_j^{(y)}), \quad \forall(i, j)\end{aligned}$$

Sous forme indicielle, le premier terme s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{ij} &= \dot{\mathrm{U}}_{kl}(\phi_k^{(x)}\phi_l^{(y)}, \phi_i^{(x)}\phi_j^{(y)}) \\ &= (\phi_k^{(x)}, \phi_i^{(x)})\dot{\mathrm{U}}_{kl}(\phi_l^{(y)}, \phi_j^{(y)}) \\ &= [\mathbf{M}_x]_{ik}[\dot{\mathbf{U}}]_{kl}[\mathbf{M}_y^{\mathrm{T}}]_{lj}\end{aligned}$$

Tensorisation

Cas bi-dimensionnel

Ceci s'écrit

- *sous forme factorisée*

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}_x \dot{\mathbf{U}}\, \mathbf{M}_y^{\mathrm{T}}$$

- *sous forme assemblée*

$$\mathbf{w} = \underbrace{(\mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x)}_{=\,\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}}$$

avec la matrice de masse assemblée

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x}$$

Tensorisation

Cas bi-dimensionnel

Le second terme des équations semi-discrètes s'écrit

$$\mathrm{W}_{ij} = \mathrm{U}_{kl}\mathcal{A}(\phi_k^{(x)}\phi_l^{(y)}, \phi_i^{(x)}\phi_j^{(y)})$$

Pour un opérateur à variables séparables tel que

$$A(u) = A_x(u) + A_y(u)$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{ij} &= \mathcal{A}_x(\phi_k^{(x)}, \phi_i^{(x)})\mathrm{U}_{kl}(\phi_l^{(y)}, \phi_j^{(y)}) + (\phi_k^{(x)}, \phi_i^{(x)})\mathrm{U}_{kl}\mathcal{A}_y(\phi_l^{(y)}, \phi_j^{(y)}) \\ &= [\mathbf{A}_x]_{ik}[\mathbf{U}]_{kl}[\mathbf{M}_y^{\mathrm{T}}]_{lj} + [\mathbf{M}_x]_{ik}[\mathbf{U}]_{kl}[\mathbf{A}_y^{\mathrm{T}}]_{lj}\end{aligned}$$

Tensorisation

Cas bi-dimensionnel

Ceci s'écrit

- *sous forme factorisée*

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}_x \mathbf{U}\, \mathbf{M}_y^{\mathrm{T}} + \mathbf{M}_x \mathbf{U}\, \mathbf{A}_y^{\mathrm{T}}$$

- *sous forme assemblée*

$$\mathbf{w} = (\underbrace{\mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x}_{=\,\mathbf{A}})\dot{\mathbf{u}}$$

avec la matrice de discrétisation assemblée

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x}$$

Tensorisation

Cas bi-dimensionnel

On peut ainsi écrire les équations semi-discrètes sous la forme standard

$$\boxed{\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{f}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x \\ \mathbf{A} &= \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x \end{aligned}$$

Tensorisation

Cas tri-dimensionnel

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x$$

En trois dimensions, la matrice de masse assemblée devient

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_z \otimes \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x$$

et la matrice de discrétisation assemblée est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = {} & \mathbf{M}_z \otimes \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x \\ & + \mathbf{M}_z \otimes \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x \\ & + \mathbf{A}_z \otimes \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x \end{aligned}$$

Tensorisation

Cas n-dimensionnel

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{M}_x$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_y \otimes \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{M}_x$$

En n-dimensions, la matrice de masse globale devient

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_2} \otimes \mathbf{M}_{x_1}$$

et la matrice de discrétisation globale est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = {} & \mathbf{M}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_2} \otimes \mathbf{A}_{x_1} \\
& + \mathbf{M}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}_{x_2} \otimes \mathbf{M}_{x_1} \\
& \ldots \\
& + \mathbf{M}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_2} \otimes \mathbf{M}_{x_1} \\
& \ldots \\
& + \mathbf{A}_{x_n} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_k} \otimes \ldots \otimes \mathbf{M}_{x_2} \otimes \mathbf{M}_{x_1}
\end{aligned}$$

Références

- *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund, Cambridge University Press, 2002