

Mécanique Numérique des Fluides Compressibles

Dr. A. Drotz

2005-2006

CONTENTS

I	Introduction aux écoulements instationnaires	9
1	Introduction	13
2	Les équations d'Euler tridimensionnelles	15
2.1	Formulation intégrale	15
2.1.1	Conservation de la masse	15
2.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	15
2.1.3	Conservation de l'énergie	15
2.1.4	Equation d'état pour un gaz idéal	15
2.2	Formulations différentielles	16
2.2.1	Forme conservative	16
2.2.2	Forme quasi-conservative	17
2.2.3	Forme non conservative	18
3	Les équations d'Euler monodimensionnelles	19
3.1	Formulation complète	19
3.1.1	Forme non-conservative	19
3.1.2	Forme conservative	20
3.1.3	Forme quasi-conservative ou linéaire	20
3.2	Formulation avec variation de section	22
3.2.1	Cas où la section dépend de x et du temps t	22
3.2.2	Cas où la section dépend seulement de x	23
3.3	Formulations particulières	23
3.3.1	Formulation isentrope	23
3.3.2	Formulation isotherme	23
3.3.3	Formulation linéarisée	23
3.4	Les équations monodimensionnelles instationnaires	24
3.4.1	Relation de similitude	24
3.4.2	Valeurs propres et vecteurs propres	25
3.4.3	Variables caractéristiques	26

4 Ecoulement instationnaire monodimensionnel d'un gaz idéal	29
4.1 Etude théorique	29
4.1.1 Les équations de base	29
4.1.2 Mise en forme des équations	30
4.1.3 Recherche des caractéristiques	32
4.1.4 Onde simple	34
4.1.5 Valeurs propres, vecteurs propres, équations caractéristiques et variables caractéristiques du système	35
4.2 Etude d'un écoulement isentrope en régime de détente	39
4.2.1 Expérience	39
4.2.2 Etude théorique pour le régime de détente	40
4.2.3 Exemple: expansion dans le vide	45
4.3 Propagation d'une onde de choc	47
4.4 Etude du tube à choc	50
4.4.1 Principe	50
4.4.2 Calculs	51
5 Introduction au problème de Riemann	55
5.1 Etude théorique	55
5.1.1 L'équation de convection scalaire linéaire	55
5.1.2 L'équation de convection scalaire non-linéaire	58
5.1.3 Système d'équations	62
5.2 Applications	67
5.2.1 Système linéarisée de la dynamique des gaz	67
II Construction de schémas d'ordre supérieur	73
6 Schémas de discrétisation aux différences finies classiques	75
6.1 L'équation scalaire de convection linéaire	75
6.2 Principe de discrétisation	76
6.3 Schémas du premier ordre décentré	79
6.3.1 Schéma CIR	79
6.3.2 Schéma CIR unifié	81
6.3.3 Schéma de Lax-Friedrich (L.F.)	81
6.3.4 Généralisation à des systèmes d'équations linéaires	82
6.3.5 La dissipation : atténuation du signal	84
6.3.6 La monotonie	85
6.4 Schémas linéaires du second ordre et plus	86
6.4.1 Construction de schémas linéaires de précision donnée	86
6.4.2 Le schéma de Lax-Wendroff	87
6.4.3 Le théorème de Godunov pour les schémas linéaires d'ordre ≥ 2	88
6.4.4 Les solutions parasites des schémas d'ordre supérieur	90

6.4.5	Quelques autres schémas classiques	91
6.4.6	Résumé	94
6.5	Problèmes non linéaires	94
6.5.1	Formulation non conservative et discontinuités	94
6.6	Formulation conservative	96
6.6.1	Quand deux caractéristiques se rencontrent	96
6.6.2	Le concept de solution faible	99
6.6.3	La formulation conservative mathématique ou physique	102
6.6.4	Non-unicité de la solution	102
6.6.5	La condition d'entropie	102
7	Schémas de discréétisation conservatifs	105
7.1	Introduction	105
7.2	Première approche	106
7.3	Formulation intégrale simplifiée au problème monodimensionnel	107
7.3.1	Application à l'équation de Burgers	109
7.3.2	Consistance de la formulation conservative	110
7.4	Extension des schémas-q sous forme conservative	111
7.4.1	Schémas-q pour l'équation de Burgers	111
7.4.2	Schémas q sous forme conservative	112
7.5	Autres schémas numériques sous forme conservative	112
7.5.1	Schémas du premier ordre	113
7.5.2	Schémas du second ordre	113
7.5.3	Exemple	114
7.5.4	Conclusion	115
7.6	Méthode de Godunov	115
7.6.1	Introduction	115
7.6.2	Elaboration de la méthode de Godunov avec l'équation scalaire de convection	115
7.6.3	Deuxième approche de Godunov	120
7.6.4	La méthode de Godunov pour les systèmes linéaires	121
7.7	Méthode de Godunov pour des problèmes non-linéaires	126
7.7.1	La base	126
7.7.2	Le schéma de Godunov	129
7.8	La méthode de décomposition des flux	131
7.8.1	Introduction	131
7.8.2	Principe de la méthode	131
7.8.3	Application aux équations d'Euler isotherme	132
7.9	Le problème de Riemann et le solveur de Roe	135
7.9.1	Le problème de Riemann et le flux de Godunov	135
7.9.2	Le problème de Riemann et les relations intégrales	135
7.9.3	Les approximations des lois de conservations	137

7.9.4	L'approximation du problème de Riemann	138
7.9.5	La méthode originale de Roe	140
8	La viscosité artificielle	143
8.1	Introduction	143
8.2	MacCormack et Baldwin	144
8.3	Jameson	144
8.4	Von Neumann-Richtmyer	144
8.5	Landshoff	145
8.6	Tyler & Ellis	145
9	Les schémas FCT (Flux-Corrected Transport)	147
9.1	Principe	147
III	Les schémas monotones d'ordre supérieur	149
10	Les schémas conservatifs monotones non oscillants	153
10.1	Principe	153
10.2	Schéma du premier ordre optimal	154
10.3	Construction d'un schéma du second ordre monotone	155
10.3.1	Schémas - q et contrôleur de régularité	155
10.3.2	Le contrôleur de régularité	158
10.4	Influence de la forme de la distribution des données initiales	159
10.4.1	Distribution linéaire par morceaux des données	159
10.4.2	Principe pour préserver la monotonicité	159
10.4.3	Choix dans la détermination des gradients ou de la pente de la distribution linéaire	160
10.4.4	Principe de prévention des oscillations	163
10.5	Les fonctions limiteurs	166
10.5.1	Définition	166
10.5.2	Compatibilité des données	167
10.5.3	Quelques autres limiteurs	169
10.5.4	Dissipation artificielle des schémas	171
10.5.5	Influence du nombre de courant sur les limiteurs	173
11	Le fondement des schémas TVD	175
11.1	Définitions de schémas TVD	175
11.2	Schémas préservant la monotonicité	176
11.3	Conditions suffisantes pour qu'un schéma soit TVD	176
11.3.1	Approche théorique pour les schémas TVD explicites	176
11.3.2	Application avec le schéma C.I.R.	178

11.3.3 Le problème des extrémas	179
11.3.4 Méthode de construction de schémas TVD du second ordre explicites	180
12 Références	185
12.1 Chapitre 1	185
12.2 Chapitre 2	185
12.3 Chapitre 3	185
12.4 Chapitre 4	185
12.5 Chapitre 5	185
12.6 Chapitre 6	185
12.7 Chapitre 7	186
12.8 Chapitre 8	186

Part I

Introduction aux écoulements instationnaires

L’écoulement instationnaire d’un fluide idéal compressible présente des caractéristiques particulières. La propagation des ondes de chocs et de détente, leur interactions mutuelles ou leurs interactions avec les surfaces-frontières du fluide constituent une propriété fondamentale de ces écoulements. Pour étudier les méthodes numériques permettant de capter correctement les chocs et les détentes, il est nécessaire d’avoir une connaissance suffisante des aspects physiques des phénomènes en question. Cette partie a pour but de rappeler les équations fondamentales de ces écoulements ainsi que l’étude de quelques phénomènes physiques les plus marquants, tels que les ondes de détente, les ondes de compression et le tube à choc.

Chapter 1

INTRODUCTION

Une difficulté majeure dans les approximations numériques des équations aux dérivées partielles non-linéaires hyperboliques, et en particulier les équations d'Euler, est la présence de discontinuités dans les solutions (les chocs). Les schémas traditionnels (ou classiques) tels que les schémas de MacCormack, de Jameson etc., génèrent des oscillations non physiques plus ou moins importantes selon les schémas au voisinage des discontinuités. C'est ce que l'on constate sur la figure 1 lors du calcul de l'écoulement supersonique-subsonique dans une tuyère avec le schéma de MacCormack. Ces oscil-

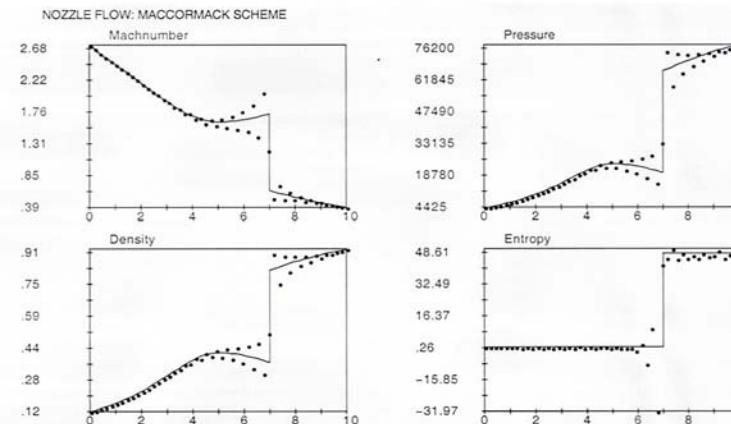


Figure 1 Schéma de MacCormack sans viscosité artificielle

lations numériques sont généralement amplifiées aux cours des itérations temporelles. Malgré tous les efforts de ces dernières décades, obtenir des solutions propres pour la résolution des équations d'Euler compressible en présence de chocs reste un problème majeur en CFD. Depuis une cinquantaine d'années, un très grand nombre de schémas numériques a été proposé pour la capture des chocs. Déjà en 1950, une solution à ce problème a été proposée par Neumann et Richtmeyer, qui introduisirent de la viscosité artificielle (viscosité numérique) dans des schémas aux différences finies. Cette approche est simple à mettre en oeuvre. Un exemple est donné sur la figure 2: Une alternative à cette approche consiste à construire une solution en introduisant des approximations discontinues constantes par morceaux (Godunov). De telles solutions

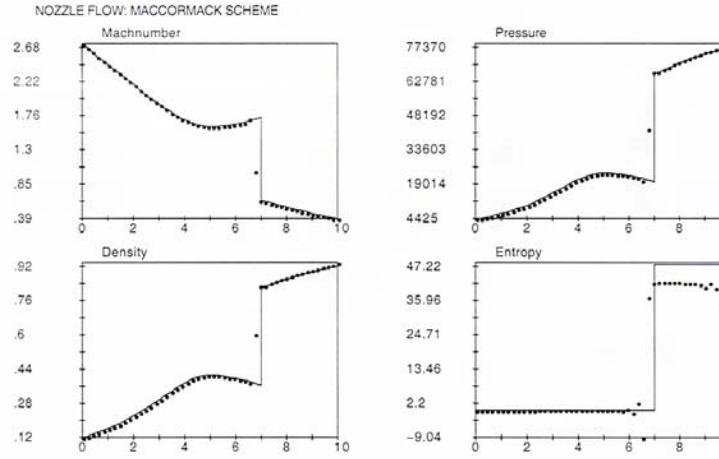


Figure 2 Schéma de MacCormack avec viscosité artificielle

conduisent à de bonnes approximations, et sont capables de représenter correctement le choc dans une petite région du maillage mais en utilisant des solveurs de Riemann (Roe, Van Leer etc.). Harten proposa alors une méthode de type TVD

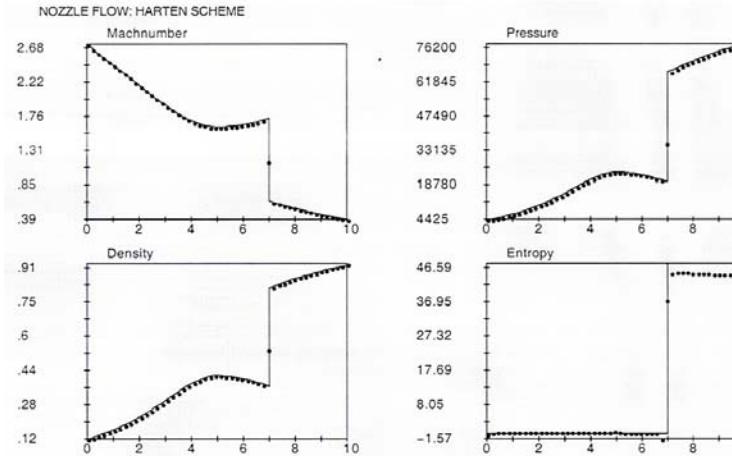


Figure 3 Schéma TVD de Harten

(Total Variation Diminishing) pour réduire les oscillations présentes dans la solution numérique. L'idée générale de ce type de schéma est d'utiliser le stencil le plus régulier pour approximer les flux aux frontières des cellules et en même temps de supprimer les oscillations au voisinage des chocs. Cette méthode fut généralisée plus tard par une méthode de type ENO (Essentially Non-Oscillatory). Des raffinements de cette dernière technique (WENO, Weighted ENO) sont actuellement opérationnelle. La figure (3) montre un exemple typique de résultat pour le calcul d'un écoulement supersonique-subsonique dans une tuyère, en utilisant un schéma TVD de Harten.

Chapter 2

LES ÉQUATIONS D'EULER TRIDIMENSIONNELLES

Dans ce chapitre nous rappelons les équations d'Euler tridimensionnelles non stationnaires. Ces équations forment un système d'équations non-linéaires qui gouverne le comportement de la dynamique de fluides compressibles tels que les gaz ou les liquides à très hautes pressions et pour lesquelles on néglige les forces gravitationnelles, les effets visqueux et les flux de chaleur. Diverses formulations sont proposées : forme intégrale, forme différentielle mais aussi les formes conservatives, quasi-conservatives et non-conservatives. Pour la formulation non conservative, on introduit les variables primitives ou variables physiques : la masse volumique ρ (ou la pression), les composantes du vecteur vitesse (u, v, w) et l'énergie interne e (ou l'enthalpie h) tandis que pour les formulations conservative et quasi-conservative les variables utilisées, les variables conservatives, sont : la masse volumique ρ , les composantes $\rho u, \rho v, \rho w$ de la quantité de mouvement volumique et ρe , l'énergie interne totale volumique. Cette dernière formulation a des avantages car elle dérive naturellement de la formulation conservative des équations de la mécanique des fluides.

2.1 Formulation intégrale

2.1.1 Conservation de la masse

$$\frac{d}{dt} \int \int \int \rho dV + \int \int \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{dS}} = 0 \quad (2.1)$$

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \int \int \int \rho \tilde{\mathbf{v}} dV + \int \int \rho \tilde{\mathbf{v}} \left(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{dS}} \right) = - \int \int p \tilde{\mathbf{dS}} + \int \int \int \rho \tilde{\mathbf{f}} dV \quad (2.2)$$

2.1.3 Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \int \int \int \rho e_t dV + \int \int (\rho e_t + p) \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{dS}} = + \int \int \int \rho \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dV \quad (2.3)$$

avec :

$$e_t = e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (2.4)$$

2.1.4 Equation d'état pour un gaz idéal

$$e = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} \quad (2.5)$$

Par suite :

$$e_t = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (2.6)$$

et en introduisant la vitesse du son $a = a(p, \rho)$:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (2.7)$$

on obtient aussi :

$$e_t = \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (2.8)$$

2.2 Formulations différentielles

2.2.1 Forme conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u w)}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v w)}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^2 + p)}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial [u(\rho e_t + p)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(\rho e_t + p)]}{\partial y} + \frac{\partial [w(\rho e_t + p)]}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

ou sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ v(\rho e_t + p) \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.2.2 Forme quasi-conservative

Une autre forme des équations d'Euler, très utile pour la connaissance de ses propriétés mathématiques est sa formulation quasi-linéaire. On écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

ou :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

avec les matrices jacobiniennes :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}, \mathcal{B} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}, \mathcal{C} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \quad (2.19)$$

Si $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_5]$, les matrices $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont construites de telle manière que les colonnes, par exemple de \mathcal{A} , soient formées par les vecteurs colonnes $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial U_j}$:

$$\mathcal{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial U_1}, \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial U_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial U_5} \right]$$

soit :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{(\kappa-1)}{2} \vec{v}^2 & (3-\kappa)u & -(\kappa-1)v & -(\kappa-1)w & \kappa-1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -u [ve_t - (\kappa-1) \vec{v}^2] & ve_t - \frac{(\kappa-1)}{2} (\vec{v}^2 + 2u^2) & -(\kappa-1)uv & -(\kappa-1)uw & \kappa u \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uw & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 + \frac{(\kappa-1)}{2} \vec{v}^2 & -(\kappa-1)u & (3-\kappa)v & -(\kappa-1)w & \kappa-1 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -v [ve_t - (\kappa-1) \vec{v}^2] & -(\kappa-1)uv & ve_t - \frac{(\kappa-1)}{2} (\vec{v}^2 + 2v^2) & -(\kappa-1)vw & \kappa v \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 + \frac{(\kappa-1)}{2} \vec{v}^2 & -(\kappa-1)u & -(\kappa-1)v & (3-\kappa)w & \kappa-1 \\ -w [ve_t - (\kappa-1) \vec{v}^2] & -(\kappa-1)uw & -(\kappa-1)vw & ve_t - \frac{(\kappa-1)}{2} (\vec{v}^2 + 2w^2) & \kappa w \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.2.3 Forme non conservative

La formulation classique des équations d'Euler sous forme non-conservative est celle obtenue en effectuant toutes les opérations de dérivation, à partir, par exemple de la forme conservative, avec les variables primitives ρ, u, v, w, p soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

ou sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} + \mathcal{B}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial y} + \mathcal{C}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{B}' = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{C}' = \begin{bmatrix} w & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & w \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Chapter 3

LES ÉQUATIONS D'EULER MONODIMENSIONNELLES

Ce cours étant un cours élémentaire pour présenter les méthodes numériques de type TVD basées sur les équations de convection, nous restreindrons leurs applications aux équations d'Euler pour des écoulements monodimensionnels stationnaires et instationnaires. Dans ce chapitre, on rappelle quelques formulations, dans le cas de gaz parfaits, nécessaires pour la compréhension du code Euler-1D utilisé pour les laboratoires de mécanique des fluides compressibles.

3.1 Formulation complète

On considère l'écoulement monodimensionnel instationnaire d'un gaz parfait vérifiant les relations :

$$e = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} \quad (3.1)$$

et :

$$e_t = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (3.2)$$

ou en introduisant la vitesse du son :

$$a = a(p, \rho) : a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (3.3)$$

$$e_t = \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (3.4)$$

3.1.1 Forme non-conservative

On a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial e_t}{\partial t} + u \frac{\partial e_t}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

ou :

$$\frac{\partial h_o}{\partial t} + u \frac{\partial h_o}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.8)$$

ou :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

avec, puisque le gaz est parfait :

$$h_o = \frac{\kappa}{\kappa - 1} rT + \frac{1}{2} u^2 \quad (3.10)$$

On peut écrire le système précédent en fonction des *variables primitives* ρ , u et p sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

avec :

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.1.2 Forme conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial [u(\rho e_t + p)]}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

ou :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

où les variables ρ , ρu , ρe_t sont les *variables conservatives*.

3.1.3 Forme quasi-conservative ou linéaire

La linéarisation de l'équation 3.16 conduit, en introduisant la matrice Jacobienne $\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ à :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

avec :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa - 3)u^2 & -(\kappa - 3)u & \kappa - 1 \\ -\kappa ue_t + (\kappa - 1)u^3 & \kappa e_t - \frac{3}{2}(\kappa - 1)u^2 & \kappa u \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ou en remplaçant e_t par :

$$e_t = \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)} + \frac{1}{2}u^2 \quad (3.20)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa - 3)u^2 & -(\kappa - 3)u & \kappa - 1 \\ -\frac{ua^2}{\kappa-1} + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right)u^3 & \frac{a^2}{\kappa-1} + \left(\frac{3}{2} - \kappa\right)u^2 & \kappa u \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

On vérifiera *la propriété d'homogénéité* suivante, valable pour les équations d'Euler avec l'équation d'état 2.5:

$$\mathbf{f} = \mathcal{A}\mathbf{U} \quad (3.22)$$

- *Méthode pour obtenir la formulation quasi-linéaire*

A partir de :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (3.23a)$$

on écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

où $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}$ est la matrice jacobienne \mathcal{A} telle que :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho u}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho e_t} \right] \quad (3.25)$$

Posons :

$$u_1 = \rho, u_2 = \rho u, u_3 = \rho e_t \quad (3.26)$$

soit :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On en déduit :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + (\kappa - 1) \left[u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right] \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} + (\kappa - 1) \left[\frac{u_2 u_3}{u_1} - \frac{u_2^3}{2u_1^2} \right] \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

soit :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + (\kappa - 1) \left[\frac{u_2^2}{2u_1^2} \right] \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} + (\kappa - 1) \left[-\frac{u_2 u_3}{u_1^2} + \frac{u_2^3}{u_1^3} \right] \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa - 3)u^2 \\ -\kappa u e_t + (\kappa - 1)u^3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

puis :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho u} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2u_2}{u_1} - (\kappa - 1) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \\ \frac{u_3}{u_1} + (\kappa - 1) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_1 - \frac{3u_2^2}{2u_1^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(\kappa - 3) u \\ \kappa e_t - \frac{3}{2}(\kappa - 1) u^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

et :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho e_t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\kappa - 1) \\ \frac{u_2}{u_1} + (\kappa - 1) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho e_t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa - 1 \\ \kappa u \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

d'où finalement :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} = \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa - 3) u^2 & -(\kappa - 3) u & \kappa - 1 \\ -\kappa u e_t + (\kappa - 1) u^3 & \kappa e_t - \frac{3}{2}(\kappa - 1) u^2 & \kappa u \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.2 Formulation avec variation de section

On considère l'écoulement monodimensionnel instationnaire d'un gaz parfait. On donnera la formulation pour des variations faibles de section.

3.2.1 Cas où la section dépend de x et du temps t

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = -\frac{1}{S} \begin{bmatrix} \rho u \frac{\partial S}{\partial t} - \rho \frac{\partial S}{\partial x} \\ \rho u^2 \frac{\partial S}{\partial x} \\ u(\rho e_t + p) \frac{\partial S}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.2.2 Cas où la section dépend seulement de x

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho S \\ \rho u S \\ \rho e_t S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u S \\ (\rho u^2 + p) S \\ [u(\rho e_t + p)] S \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial S}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Ces équations sont celles qui sont utilisées dans le code EULER1D.

3.3 Formulations particulières

3.3.1 Formulation isentrope

Dans ce cas, l'entropie est constante partout et l'on a :

$$p = p(\rho) = C\rho^\kappa \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.3.2 Formulation isotherme

Cette formulation est un cas particulier de la formulation isentrope. Dans ce cas :

$$p = p(\rho) = \rho a^2 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (3.46)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.3.3 Formulation linéarisée

Considérons une perturbation infinitésimale du champ de vitesse \hat{u} et de masse volumique $\hat{\rho}$ autour de l'état de repos du fluide $u = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$. On a alors:

$$p = p(\rho_0) + \hat{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0) = p(\rho_0) + \hat{\rho} a^2 \quad (3.48)$$

Les équations isothermes deviennent alors :

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} = 0 \quad (3.50)$$

soit, sous forme matricielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.51)$$

avec :

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

L'élimination de \hat{u} ou de $\hat{\rho}$ donne :

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.54)$$

3.4 Les équations monodimensionnelles instationnaires

Dans ce chapitre, on étudiera certaines propriétés des équations d'Euler pour un écoulement monodimensionnel instationnaire pour différentes configurations thermodynamiques.

3.4.1 Relation de similitude

On étudie tout d'abord le lien existant entre la formulation non conservative et la formulation quasi linéaire. Considérons les deux systèmes :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.55)$$

et :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

Ces deux équations représentent les mêmes lois physiques, par conséquent on doit pouvoir relier ces deux équations par une similitude. On écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}'} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}'} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.57)$$

On définit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}'} = \mathcal{M} \quad (3.58)$$

Par suite :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{M}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{M} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.59)$$

La comparaison avec l'équation 3.55 donne :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{M} \quad (3.60)$$

ou dans le cas des équations d'Euler monodimensionnelles instationnaires :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}u^2 & \rho u & 1/(\kappa - 1) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

et :

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{1}{2}(\kappa - 1)u^2 & (\kappa - 1)u & (\kappa - 1) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Or, d'après les propriétés des déterminants des matrices, on a pour la recherche des valeurs propres:

$$\det [\mathcal{A}' - \lambda \mathcal{I}] = \det [\mathcal{M}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{M} - \lambda \mathcal{I}] = \det [\mathcal{M}^{-1} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{M} \mathcal{I} \mathcal{M}^{-1}) \mathcal{M}] \quad (3.63)$$

ou :

$$\det [\mathcal{A}'] = \det [\mathcal{M}^{-1}] \det [\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}] \det [\mathcal{M}] = \det [\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}] \quad (3.64)$$

Par suite, les valeurs propres des matrices \mathcal{A}' et \mathcal{A} sont identiques.

3.4.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Les deux matrices \mathcal{A} et \mathcal{A}' ont les mêmes valeurs propres $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u + a$ et $\lambda_3 = u - a$. Le système est donc hyperbolique, avec en tout point $M(x, t)$, trois caractéristiques, définies par leurs pentes locales :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = u + a \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_3 = u - a \quad (3.65)$$

On définit alors la matrice diagonale \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u + a & 0 \\ 0 & 0 & u - a \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

ainsi que les vecteurs propres droits $\nu^{(i)}$:

$$\nu^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \nu^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ \frac{1}{2}u^2 + ua + \frac{a^2}{\kappa-1} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

et :

$$\nu^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ \frac{1}{2}u^2 - ua + \frac{a^2}{\kappa-1} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

On a alors la relation :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \mathcal{D} \mathcal{R}^{-1} \quad (3.69)$$

avec :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ u & \alpha(u+a) & \alpha(u-a) \\ \frac{1}{2}u^2 & \alpha\left(\frac{1}{2}u^2+ua+\frac{a^2}{\kappa-1}\right) & \alpha\left(\frac{1}{2}u^2-ua+\frac{a^2}{\kappa-1}\right) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

et :

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{u^2}{2} \frac{\kappa-1}{a^2} & (\kappa-1) \frac{u}{a^2} & -\frac{(\kappa-1)}{a^2} \\ \beta \left[\frac{1}{2}u^2(\kappa-1) - ua \right] & \beta [a - (\kappa-1)u] & \beta(\kappa-1) \\ \beta \left[\frac{1}{2}u^2(\kappa-1) + ua \right] & \beta [a + (\kappa-1)u] & \beta(\kappa-1) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec les coefficients de normalisation α et β :

$$\alpha = \frac{\rho}{a\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\rho a\sqrt{2}} \quad (3.72)$$

3.4.3 Variables caractéristiques

On peut écrire le système précédent en fonction des *variables primitives* ρ , u et p sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad (3.73)$$

avec :

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Les valeurs propres de \mathcal{A}' sont :

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + a$$

Introduisons un vecteur \mathbf{W} . A partir de l'équation 3.73 écrivons :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (3.75)$$

On définit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \mathbf{W}} = \mathcal{R} \quad (3.76)$$

Le vecteur \mathbf{W} vérifiant la condition :

$$\mathcal{R}^{-1} \mathcal{A}' \mathcal{R} = \mathcal{D} \quad (3.77)$$

avec la matrice \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{a}{\rho} & 0 & \frac{a}{\rho} \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

où les colonnes sont les composantes des vecteurs propres propres droits et la matrice \mathcal{R}^{-1} :

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\rho}{2a} & \frac{1}{2a^2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{\rho}{2a} & \frac{1}{2a^2} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

où les rangées sont les composantes des vecteurs propres propres gauches (à un facteur près de normalisation). Par suite :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{R}^{-1} \mathcal{A}' \mathcal{R} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (3.80)$$

Le vecteur \mathbf{W} est appelé *vecteur des variables caractéristiques*. On a donc le système:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (3.81)$$

ou le long des caractéristiques de pente locale $\lambda_j = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w_j}{\partial x} \Rightarrow dw_j = 0 \quad (3.82)$$

Pour déterminer \mathbf{W} , on effectuera le calcul :

$$\mathbf{W} = \int \mathcal{R}^{-1} d\mathbf{U}' \Rightarrow \mathbf{U}' = \int \mathcal{R} d\mathbf{W} \quad (3.83)$$

Or, d'après les propriétés des matrices et des vecteurs propres, si $\tilde{\mathcal{L}}$ est la matrice dont les lignes sont formées des composantes des vecteurs propres propres gauches, on a :

$$\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{L}}^{-1}, \mathcal{R}^{-1} = \tilde{\mathcal{L}} \quad (3.84)$$

Par suite, on a aussi :

$$\mathbf{W} = \int \tilde{\mathcal{L}} d\mathbf{U}' \quad (3.85)$$

Le vecteur \mathbf{W} est le vecteur des variables caractéristiques. On a donc le système :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (3.86)$$

où le long des caractéristiques de pente locale $\lambda_j = \frac{dx}{dt}$:

$$\tilde{\mathcal{L}} d\mathbf{U}' = d\mathbf{W} = 0 \quad (3.87)$$

Pour déterminer $d\mathbf{W}$, on effectuera le calcul :

$$\mathbf{I}^{(j)} d \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = dw_j \quad (3.88)$$

soient, le long de chaque caractéristique :

$$\begin{aligned} dp - \rho adu &= 0, \frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u - a \\ dp - a^2 d\rho &= 0, \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = u \\ dp + \rho adu &= 0, \frac{dx}{dt} = \lambda_3 = u + a \end{aligned} \quad (3.89)$$

Chapter 4

ECOULEMENT INSTATIONNAIRE MONODIMENSIONNEL D'UN GAZ IDÉAL

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats importants sur les propriétés des écoulements monodimensionnels compressibles instationnaires qui seront très utiles pour une meilleure compréhension de la construction de schémas numériques permettant de capturer des discontinuités et en particuliers des chocs. Les équations correspondantes étant de type hyperbolique, nous introduirons les équations instationnaires sous une forme particulière mettant en évidence les invariants de Riemann le long des caractéristiques. Après l'étude simplifiée de deux cas physiques élémentaires, les problèmes de détente et les problèmes avec choc, nous introduirons comme conséquence, une approche théorique, la méthode de Riemann, qui sera utilisée plus loin lors de la mise en place de schémas de discréétisation.

4.1 Etude théorique

Par hypothèse, le fluide n'est ni visqueux, ni conducteur; par ailleurs l'apport de chaleur extérieur et les forces volumiques sont nulles. On se proposera dans la suite d'étudier un écoulement monodimensionnel instationnaire *isentrope* d'un gaz parfait.

4.1.1 Les équations de base

Avec les hypothèses précédentes, considérons les équations fondamentales régissant l'écoulement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial h_o}{\partial t} + u \frac{\partial h_o}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4.3)$$

où, puisque le gaz est parfait :

$$p = \rho r T \quad (4.4)$$

$$h_o = \frac{\kappa}{\kappa - 1} r T + \frac{1}{2} u^2 \quad (4.5)$$

et où la vitesse du son a est donnée par :

$$a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = (\kappa r T)^{1/2} = \left(\frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

Comme le fluide est isentrope (adiabatique et non visqueux), on utilisera la relation thermodynamique suivante :

$$p = p(\rho) \quad (4.7)$$

avec la relation isentropique, qui remplace l'équation d'énergie :

$$p = k \rho^\kappa \quad (4.8)$$

4.1.2 Mise en forme des équations

On élimine la pression dans 4.2 en introduisant 4.6 et en écrivant :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (4.9)$$

Le système 4.1 à 4.3 est alors remplacé par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

A partir de 4.8, on en déduit :

$$p a^{-\kappa/(\kappa-1)} = Cte \quad (4.12)$$

ou

$$\rho a^{-2/(\kappa-1)} = Cte \quad (4.13)$$

On différentie l'équation 4.13 par rapport à t et à x :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (4.15)$$

On remplace alors 4.14 et 4.15 dans 4.10 et 4.11, il vient :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\kappa-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\kappa-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

A cause de la symétrie des deux équations, multiplions la première, par exemple, par un facteur λ à déterminer et additionnons les deux relations obtenues:

$$\frac{\partial(u + \lambda a)}{\partial t} + u \frac{\partial(u + \lambda a)}{\partial x} + \frac{\kappa - 1}{2} \lambda a \frac{\partial}{\partial x} \left[u + \left(\frac{2}{\kappa - 1} \right)^2 \frac{1}{\lambda} a \right] = 0 \quad (4.18)$$

Pour que le terme de droite ait la même forme que les deux autres, on doit avoir :

$$\lambda = \pm \frac{2}{\kappa - 1} \quad (4.19)$$

Par conséquent, avec le signe +, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[u + \frac{2}{\kappa - 1} a \right] + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \left[u + \frac{2}{\kappa - 1} a \right] = 0 \quad (4.20)$$

et avec le signe - :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[u - \frac{2}{\kappa - 1} a \right] + (u - a) \frac{\partial}{\partial x} \left[u - \frac{2}{\kappa - 1} a \right] = 0 \quad (4.21)$$

On pose :

$$u + \frac{2}{\kappa - 1} a = P = u + \mathcal{P} \quad (4.22)$$

et :

$$u - \frac{2}{\kappa - 1} a = Q = u + \mathcal{Q} \quad (4.23)$$

avec :

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\kappa - 1} a \quad (4.24)$$

et :

$$\mathcal{Q} = - \frac{2}{\kappa - 1} a \quad (4.25)$$

on obtient alors :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.27)$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0 \quad (4.28)$$

avec :

$$w_1 = P, w_2 = Q; \lambda_1 = u + a, \lambda_2 = u - a \quad (4.29)$$

Introduisons les définitions suivantes :

$$\frac{D^+}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.30)$$

$$\frac{D^-}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.31)$$

Ces opérateurs sont les dérivées temporelles mesurées par un observateur se déplacant dans la direction $+x(-x)$ à la vitesse $u + a$, $(u - a)$ c'est-à-dire à la vitesse d'une onde sonore. Dans le plan $x - t$, les directions $dx/dt = u \pm a$ sont les directions locales des caractéristiques. On obtient finalement :

$$\frac{D^+ P}{Dt} = \frac{D^+ (u + \mathcal{P})}{Dt} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{D^- Q}{Dt} = \frac{D^- (u + \mathcal{Q})}{Dt} = 0 \quad (4.33)$$

4.1.3 Recherche des caractéristiques

Les grandeurs P et Q sont appelées *les invariants de Riemann*. On cherche alors les lignes le long desquelles les grandeurs P et Q sont constantes. Pour cela exprimons P et Q en fonction de x et t et calculons les différentielles totales de P et Q . Prenons le cas de P :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt \quad (4.34)$$

Or, avec 4.26, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(u + a) \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.35)$$

d'où :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} [dx - (u + a) dt] \quad (4.36)$$

Lorsque dP est nul, P est constant sur la ligne :

$$\frac{dx}{dt} = (u + a) \quad (4.37)$$

Cette ligne est *la courbe caractéristique C^+* vérifiant la condition:

$$P = u + \frac{2}{\kappa - 1} a = u + \mathcal{P} = Cte \quad (4.38)$$

où la caractéristique C^+ est déterminée par sa pente locale :

$$C^+ : \frac{dx^+}{dt} = (u + a) \quad (4.39)$$

De même pour Q , on aura la caractéristique C^- telle que :

$$Q = u - \frac{2}{\kappa - 1} a = u + \mathcal{Q} = Cte \quad (4.40)$$

où la caractéristique C^- est déterminée par sa pente locale

$$C^- : \frac{dx^-}{dt} = (u - a) \quad (4.41)$$

Si maintenant on associe aux lignes caractéristiques C^+ et C^- passant par un point M , le système de coordonnées (ξ, η) tel que le long de $C^-, \xi = Cte$ et le long de $C^+, \eta = Cte$, on a (figure 1) :

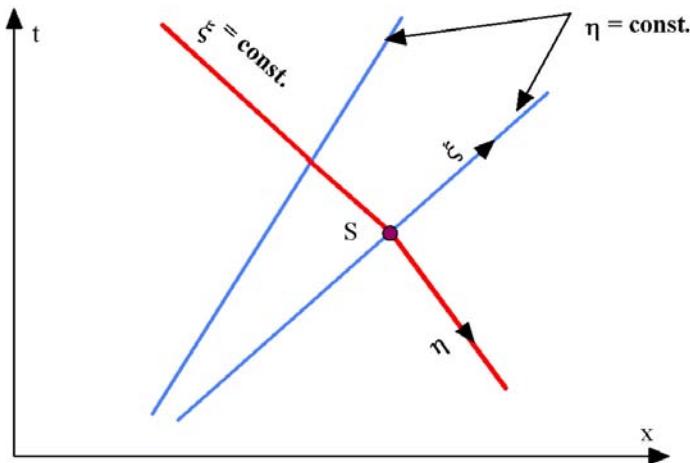


Figure 1 Onde simple

- Le long de C^+ :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0 \quad (4.42)$$

avec :

$$C^+ : \left(\frac{dx^+}{dt} \right)_\eta = u + a \quad (4.43)$$

et :

$$P = u + \frac{2}{\kappa - 1} a = u + \mathcal{P} = Cte \quad (4.44)$$

- Le long de C^- :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial a}{\partial \eta} = 0 \quad (4.45)$$

avec :

$$C^- : \left(\frac{dx^-}{dt} \right)_\xi = u - a \quad (4.46)$$

et :

$$Q = u - \frac{2}{\kappa - 1} a = u + \mathcal{Q} = Cte \quad (4.47)$$

On remarquera qu'une caractéristique $C^+, \eta = Cte$ se présente toujours avec une pente positive dans le plan (x, t) . En revanche, une caractéristique $C^-, \xi = Cte$ a une pente positive ou négative selon que l'écoulement est subsonique ou supersonique.

4.1.4 Onde simple

Considérons une onde quelconque dans le plan xt représentée par les lignes caractéristiques. Cette onde est dite simple si elle se trouve adjacente à un domaine d'écoulement invariable. Celle-ci est constituée par des lignes caractéristiques droites appartenant à l'une des familles η ou ξ constantes. Cette propriété découle directement des relations (4.43 – 4.46). Considérons par exemple une onde décrite par une famille de caractéristiques η constantes (figure 2). Sur cette figure deux caractéristiques ξ constantes sont issues du domaine où l'état d'écoulement est invariable. Ces caractéristiques rencontrent en R et S un membre de la famille de courbes $\eta = \text{constante}$. En appliquant (4.44) et (4.47) pour les variables de l'écoulement aux points R et S on obtient

$$\left. \begin{aligned} u_S + \frac{2}{\kappa-1} a_S &= u_R + \frac{2}{\kappa-1} a_R \\ u_S - \frac{2}{\kappa-1} a_S &= Q = \text{constante} \\ u_R - \frac{2}{\kappa-1} a_R &= Q = \text{constante} \end{aligned} \right\}$$

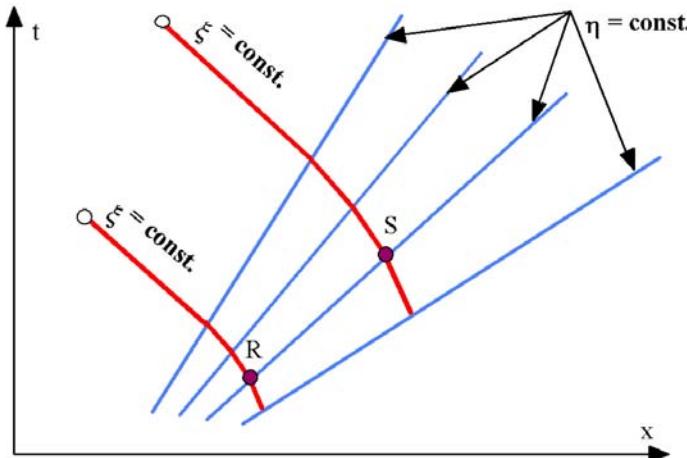


Figure 2 Série d'ondes simples

d'où l'on tire $a_S = a_R$ et $u_S = u_R$. u et a sont donc constantes le long d'une courbe $\eta = \text{constante}$. Selon (4.43) la pente d'une ligne $\eta = \text{constante}$ est invariable et par conséquent les lignes η sont des lignes droites.

4.1.5 Valeurs propres, vecteurs propres, équations caractéristiques et variables caractéristiques du système

Considérons de nouveau le système suivant:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.49)$$

Ecrivons ce système sous forme matricielle; on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} = 0 \quad (4.50)$$

avec :

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}, \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{a^2}{\rho} & u \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

où \mathbf{u}' est le vecteur des variables primitives.

Les valeurs propres

Les valeurs propres de \mathcal{A}' s'obtiennent en calculant le déterminant :

$$\det |\mathcal{A}' - \lambda \mathcal{I}| = 0 \quad (4.52)$$

soit:

$$\lambda_1 = u + a, \lambda_2 = u - a \quad (4.53)$$

Vecteurs propres droits

Cherchons ensuite les deux vecteurs droits $\nu^{(1)} = [\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}]^T$ et $\nu^{(2)} = [\nu_1^{(2)}, \nu_2^{(2)}]^T$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On doit vérifier, par exemple avec $\nu^{(1)}$:

$$\mathcal{A}' \nu^{(1)} = \lambda_1 \nu^{(1)} \quad (4.54)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} u & \rho \\ a^2/\rho & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u + a) \nu_1^{(1)} \\ (u + a) \nu_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

d'où :

$$\rho \nu_2^{(1)} = a \nu_1^{(1)} \quad \frac{a^2}{\rho} \nu_1^{(1)} = a \nu_2^{(1)} \quad (4.56)$$

Ces deux relations sont identiques. Par conséquent, on peut introduire un facteur d'échelle arbitraire, par exemple k_1 et écrire :

$$\nu^{(1)} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Pour le vecteur propre $\nu^{(2)}$, on introduira le facteur d'échelle k_2 et on écrira :

$$\nu^{(2)} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Si on pose $k_1 = k_2 = 1$, on aura :

$$\nu^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \end{bmatrix}, \nu^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Vecteurs propres gauches

On peut aussi déterminer les vecteurs propres gauches $\mathbf{l}^{(1)} = [l_1^{(1)}, l_2^{(1)}]$ et $\mathbf{l}^{(2)} = [l_1^{(2)}, l_2^{(2)}]$. Ainsi, pour $\mathbf{l}^{(1)}$ on a :

$$\mathbf{l}^{(1)} \mathcal{A}' = \mathbf{l}^{(1)} \lambda_1 \quad (4.60)$$

soit

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & \rho \\ a^2/\rho & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} \end{bmatrix} \lambda_1 \quad (4.61)$$

On obtient :

$$l_2^{(1)} \frac{a^2}{\rho} = +l_1^{(1)} a \quad l_1^{(1)} \rho = -l_2^{(1)} a \quad (4.62)$$

Ces deux relations sont identiques. Par conséquent, on peut encore introduire un facteur d'échelle arbitraire, par exemple k'_1 et écrire :

$$\mathbf{l}^{(1)} = [l_1^{(1)}, l_2^{(1)}] = k'_1 \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix}, 1 \quad (4.63)$$

De même, pour $\mathbf{l}^{(2)}$ on aura :

$$\mathbf{l}^{(2)} = [l_1^{(2)}, l_2^{(2)}] = k'_2 \begin{bmatrix} -a \\ \rho \end{bmatrix}, 1 \quad (4.64)$$

En posant $k'_1 = k'_2 = 1$, on a :

$$\mathbf{l}^{(1)} = \begin{bmatrix} a \\ \rho \end{bmatrix}, 1, \quad \mathbf{l}^{(2)} = \begin{bmatrix} -a \\ \rho \end{bmatrix}, 1 \quad (4.65)$$

Equations caractéristiques

Reprenons l'équation 4.50 et multiplions la par les vecteurs propres gauches $\mathbf{l}^{(i)}$:

$$\mathbf{l}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{l}^{(i)} \cdot \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} = 0 \quad (4.66)$$

ou en introduisant 4.60 avec $(1) = (i)$:

$$\mathbf{l}^{(i)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} \right] = 0 \quad (4.67)$$

Or, comme $\lambda_i = \frac{dx}{dt}$:

$$\mathbf{l}^{(i)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} \right] = 0 \Rightarrow \mathbf{l}^{(i)} \cdot d\mathbf{u}' = 0 \quad (4.68)$$

Soit pour $\lambda_1 = \frac{dx}{dt}$ avec $\mathbf{l}^{(1)}$:

$$\left[\frac{a}{\rho}, 1 \right] \cdot \left[\begin{array}{c} d\rho \\ du \end{array} \right] = 0 \Rightarrow du + \frac{a}{\rho} d\rho = 0 \quad (4.69)$$

Si on multiplie 4.50 par $\mathbf{l}^{(2)}$, on obtient pour $\lambda_2 = \frac{dx}{dt}$:

$$\left[-\frac{a}{\rho}, 1 \right] \cdot \left[\begin{array}{c} d\rho \\ du \end{array} \right] = 0 \Rightarrow du - \frac{a}{\rho} d\rho = 0 \quad (4.70)$$

On peut d'ailleurs réécrire 4.69 et 4.70 en introduisant :

$$\rho a^{-2/(\kappa-1)} = Cte \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} du + \frac{a}{\rho} d\rho = 0 &\Rightarrow du + \frac{2}{\kappa-1} da = 0 \\ du - \frac{a}{\rho} d\rho = 0 &\Rightarrow du - \frac{2}{\kappa-1} da = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

On retrouve les résultats obtenus sous 4.22 et 4.23 :

$$u + \frac{2}{\kappa-1} a = P = u + \mathcal{P} \quad (4.73)$$

et :

$$u - \frac{2}{\kappa-1} a = Q = u + \mathcal{Q} \quad (4.74)$$

Variables caractéristiques

Si on introduit les 2 variables caractéristiques δw_1 et δw_2 où δ représente les variations $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$, on a par définition :

$$\delta \mathbf{w} = \mathcal{R}^{-1} \delta \mathbf{u}' \quad (4.75)$$

ou :

$$\mathbf{w} = \int \mathcal{R}^{-1} d\mathbf{u}' \quad (4.76)$$

où \mathcal{R}^{-1} est la matrice formée par les vecteurs propres *gauches* :

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{\rho} & 1 \\ -\frac{a}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Les variables w_j vérifient les équations :

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, j = 1, 2 \quad (4.78)$$

soit :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (4.80)$$

On calcule alors les variables w_j :

$$\mathbf{w} = \int \begin{bmatrix} \frac{a}{\rho} & 1 \\ -\frac{a}{\rho} & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

soit :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} a \frac{dp}{\rho} + du \\ a \frac{dp}{\rho} - du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \frac{2}{\kappa-1} a \\ u - \frac{2}{\kappa-1} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \mathcal{P} \\ u + \mathcal{Q} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Les équations 4.78 valables pour chacune des valeurs propres de la matrice \mathcal{A}' du système original 4.50 n'implique chacune que l'inconnu $w_j(x, t)$. On dira que ce système est une représentation découpée du système 4.50 puisque on peut y revenir en écrivant, par exemple 4.75 sous la forme :

$$\delta \mathbf{u}' = \mathcal{R} \delta \mathbf{w} \quad (4.83)$$

Les vitesses caractéristiques sont alors les valeurs propres λ_j et il y a $m = 2$ caractéristiques satisfaisant les équations :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j, j = 1, 2$$

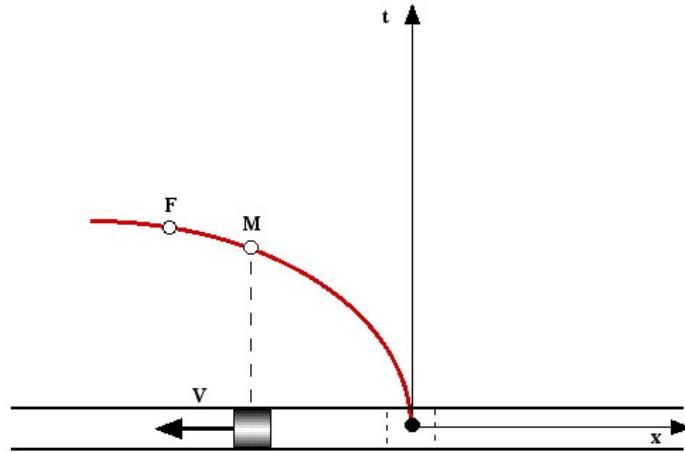


Figure 3 Trajectoire du piston

4.2 Etude d'un écoulement isentrope en régime de détente

4.2.1 Expérience

Considérons un tube semi-infini limité d'un côté par un piston et rempli d'un gaz initialement au repos (figure 3).

A l'instant $t = 0$, le piston est en $x = 0$ tandis que le gaz est contenu dans la partie des x positifs. Le piston est mis progressivement en accélération dans le sens des x négatifs et est animé d'une vitesse V variant de $V = 0$ à $V = V_F$ uniforme par exemple. Au cours du mouvement les particules en contact avec le piston ont pour vitesse $V_M = -V$. On constate qu'au cours du mouvement du piston, dans certaines régions du tube, *le gaz refroidit, la pression baisse ainsi que la masse volumique et que la vitesse du son*. Ce phénomène est caractéristique d'une détente dans un fluide.

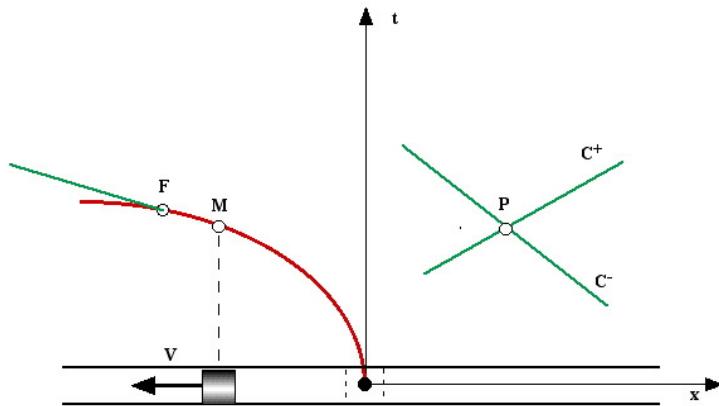


Figure 4 Caractéristiques en un point P

4.2.2 Etude théorique pour le régime de détente

En tout point de l'écoulement, donc pour chaque particule fluide, passent deux caractéristiques (figure 4), l'une montante C^+ , $\eta = Cte$, l'autre descendante C^- , $\xi = Cte$ dans le plan (x, t) .

Lieu des particules aux repos

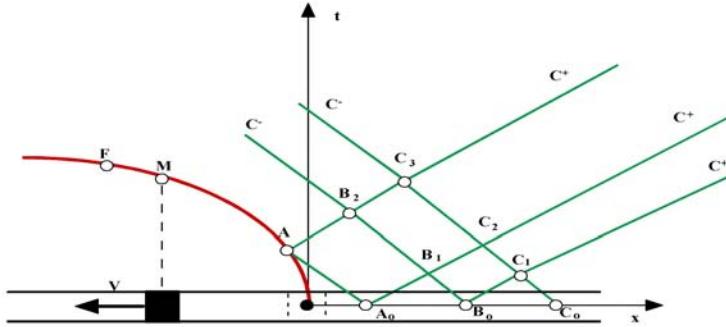


Figure 5 Réseaux de caractéristiques C^+ et C^-

Considérons le point C_1 à l'intersection des caractéristiques issues des points B_o et C_o , situés sur les x positifs (figure 5). On a :

$$u_{B_o} + \mathcal{P}_{B_o} = u_{C_1} + \mathcal{P}_{C_1} = Cte \quad (4.84)$$

$$u_{C_o} - \mathcal{Q}_{C_o} = u_{C_1} - \mathcal{Q}_{C_1} = Cte \quad (4.85)$$

Or, le fluide est initialement au repos, par suite :

$$\mathcal{P}_{A_o} = \mathcal{P}_{B_o} = \mathcal{P}_{C_o} = \mathcal{P}_o \quad (4.86)$$

et :

$$u_{A_o} = u_{B_o} = u_{C_o} = 0 \quad (4.87)$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}_{C_1} = \mathcal{P}_o \implies a_{C_1} = a_o \text{ et } u_{C_1} = 0 \quad (4.88)$$

Ce résultat est valable pour tous les points se situant sur les caractéristiques C^+ issues des points pour lesquels $x_{B_o} > 0$. Or la caractéristique $C_{orig.}^+$ limite, issue de l'origine, a pour pente :

$$C_{orig.}^+ : \left(\frac{dx^+}{dt} \right)_{\eta, orig.} = (u + a)_{orig.} = a_o \quad (4.89)$$

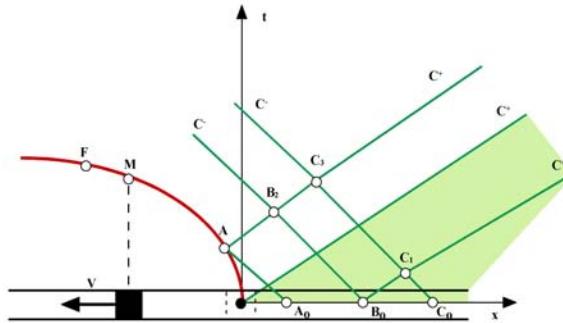


Figure 6 Zone grisée : fluide au repos

ou :

$$C_{orig.}^+ : \left(\frac{dt}{dx} \right)_{\eta, orig.} = \frac{1}{a_o} \quad (4.90)$$

Par conséquent, au dessous de cette caractéristique $C_{orig.}^+$, le fluide est au repos (figure 6).

Propriétés le long des caractéristiques C^+

Considérons la caractéristique C^+ issue du point A (piston), provenant elle même du point A_o par une caractéristique C^- . Au points B_2 et C_3 , on a :

$$u_A + \mathcal{P}_A = u_{B_2} + \mathcal{P}_{B_2} = u_{C_3} + \mathcal{P}_{C_3} = Cte = K \quad (4.91)$$

Mais en B_2 passe une caractéristique C^- issue de B_o et en C_3 une caractéristique C^- issue de C_o ; on a donc :

$$u_{B_2} - \mathcal{P}_{B_2} = u_{B_o} - \mathcal{P}_{B_o} = Cte \quad (4.92)$$

$$u_{C_3} - \mathcal{P}_{C_3} = u_{C_o} - \mathcal{P}_{C_o} = Cte \quad (4.93)$$

Or, comme :

$$\mathcal{P}_{B_o} = \mathcal{P}_{C_o} = \mathcal{P}_o \quad (4.94)$$

et :

$$u_{B_o} = u_{C_o} = 0 \quad (4.95)$$

On en déduit:

$$u_{B_2} - \mathcal{P}_{B_2} = -\mathcal{P}_o \quad (4.96)$$

$$u_{C_3} - \mathcal{P}_{C_3} = -\mathcal{P}_o \quad (4.97)$$

et avec 4.91, on obtient :

$$u_{B_2} = u_{C_3} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{B_2} = \mathcal{P}_{C_3} \implies a_{B_2} = a_{C_3} \quad (4.98)$$

On en déduit que les vitesses u et a sont constantes sur les caractéristiques. Par ailleurs au point A la vitesse de la particule fluide est égale à la vitesse du piston, on a donc au point C_3 par exemple :

$$u_A + \mathcal{P}_A = u_{C_3} + \mathcal{P}_{C_3} = K \quad (4.99)$$

et :

$$u_{C_3} - \mathcal{P}_{C_3} = -\mathcal{P}_o \quad (4.100)$$

Or A provient de A_0 par une caractéristique C^- , d'où :

$$u_A - \mathcal{P}_A = \mathcal{P}_o \quad (4.101)$$

On en déduit, puisque,

$$u_A = (u_{B_2} = u_{C_3}) = -V \quad (4.102)$$

$$\mathcal{P}_{C_3} = \mathcal{P}_o - V \implies a_{C_3} = a_o - \frac{\kappa - 1}{2}V \quad (4.103)$$

La vitesse du son diminue, donc la pression baisse ainsi que la masse volumique : on a bien une détente. Finalement la pente de la caractéristique est constante et donnée par :

$$C^+ : \left(\frac{dt}{dx} \right)_\eta^+ = \frac{1}{u_{C_3} + \mathcal{P}_{C_3}} = \frac{1}{-V + a_o - [(\kappa - 1)/2]V} = \frac{1}{a_o - [(\kappa + 1)/2]V} \quad (4.104)$$

Comme V augmente, de même la pente augmente, on a donc un faisceau divergent (figure 7). Au point F où la vitesse est constante, on a un régime uniforme. Lorsque la vitesse du piston augmente, pour une certaine valeur de V , $u + a = 0$, le dénominateur de 4.104 s'annule, la caractéristique C^+ est verticale et on a la condition:

$$u = -V = -\frac{2}{\kappa + 1}a_o \quad (4.105)$$

On a ainsi un écoulement sonique vers la gauche :

$$|u|_{son.} = \frac{2}{\kappa + 1}a_o \quad (4.106)$$

Cette relation est à comparer avec la vitesse sonique d'un écoulement isentrope stationnaire :

$$|u|_{son.} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}}a_o \quad (4.107)$$

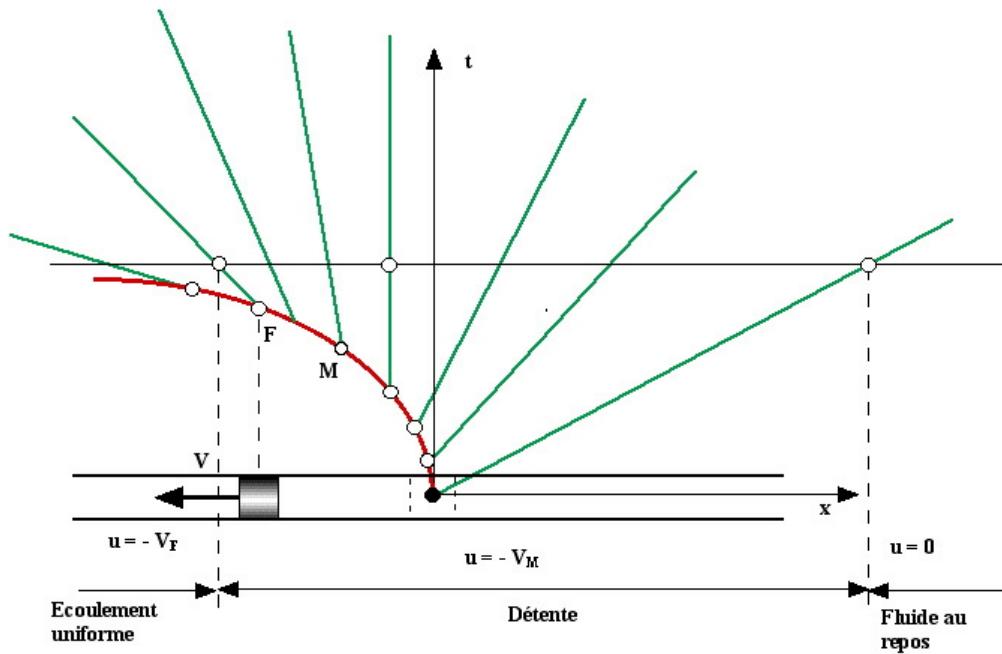


Figure 7 Caractéristiques et piston en mouvement

Pour de très grandes valeurs de V la vitesse du son a tend vers zéro, ainsi que toutes les grandeurs thermodynamiques correspondantes, p, ρ, T , on a alors :

$$|u|_{fuite.} = \frac{2}{\kappa - 1} a_o \quad (4.108)$$

Pour cette vitesse les caractéristiques C^+ et C^- et la trajectoire des particules sont confondus. Il n'est plus possible au fluide de rester en contact avec le piston. Une zone de vide apparaît. C'est la vitesse maximum que l'on peut atteindre quand un gaz se détend dans le vide : on l'appelle *vitesse de fuite ou d'échappement*. De nouveau, on peut comparer cette valeur avec la vitesse correspondante dans le cas d'un écoulement isentrope stationnaire :

$$|u|_{fuite,isen.} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} a_o \quad (4.109)$$

Calcul des grandeurs physiques de l'écoulement

Comme l'écoulement est isentropique, la pression, la température et la masse volumique du gaz peuvent être reliées à la vitesse du son a au moyen des relations isentropiques que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{a}{a_o} \right)^{2\kappa/(\kappa-1)} \quad (4.110)$$

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{a}{a_o} \right)^2 \quad (4.111)$$

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{a}{a_o} \right)^{2/(\kappa-1)} \quad (4.112)$$

Trajectoire d'une particule en régime de détente

Considérons l'équation de la pente de la caractéristique C^+ :

$$C^+ : \left(\frac{dt}{dx} \right)_\eta^+ = \frac{1}{a_o - [(\kappa + 1)/2] V} = \frac{1}{a_o + [(\kappa + 1)/2] u} \quad (4.113)$$

A partir d'un point de la trajectoire du piston, $M(t_M, x_M)$ par exemple on écrit :

$$C_M^+ : \frac{t - t_M}{x - x_M} = \frac{1}{a_o + [(\kappa + 1)/2] u} \quad (4.114)$$

L'équation d'une trajectoire d'une particule est par définition :

$$u = \frac{dx}{dt} \quad (4.115)$$

En introduisant cette définition dans 4.114, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\frac{(x - x_M) - a_o (t - t_M)}{(t - t_M)} \right] \quad (4.116)$$

Posons $x - x_M = x^*, t - t_M = t^*$:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = -\frac{2}{\kappa + 1} a_o + \frac{2}{\kappa + 1} a_o \frac{x^*}{t^*} \quad (4.117)$$

On obtient après intégration :

$$x^* = -\frac{2}{\kappa - 1} a_o t^* + A (t^*)^{2/(\kappa+1)} \quad (4.118)$$

Comme la particule est initialement en $x = x_o$, l'expansion commence en $t_o = x_o/a_o$ le long de la caractéristique C^+ issue de l'origine. Il suffit alors de poser $t_M = 0$ et $x_M = 0$. Lorsque $t < t_o$, on se trouve dans le domaine au repos et la solution précédente n'est pas applicable. On a dans cette région $x = x_0 = Cte$.

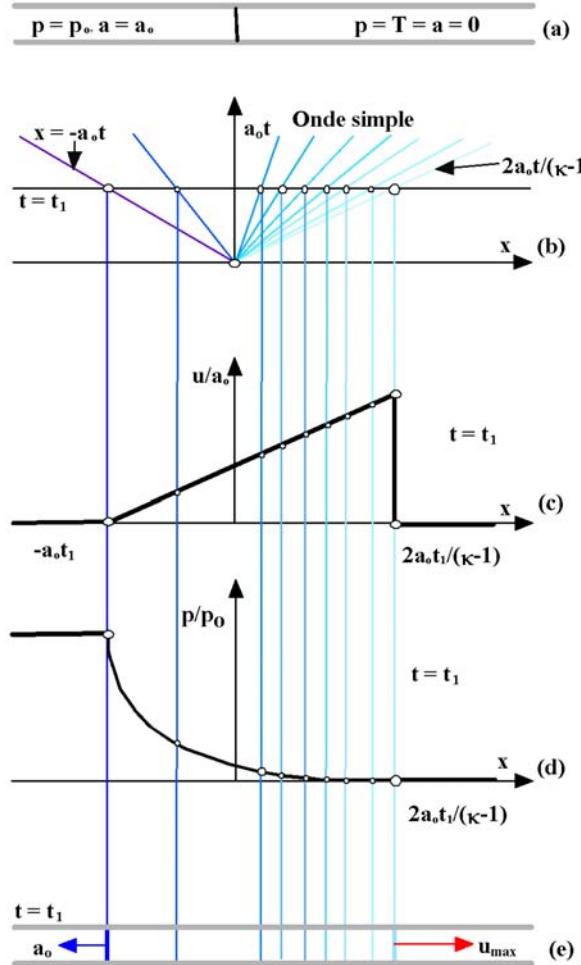


Figure 8 Expansion dans un tube

4.2.3 Exemple: expansion dans le vide

Considérons un tube obstrué au milieu par un diaphragme et rempli d'un côté du diaphragme par un gaz parfait. La pression dans ce gaz et sa vitesse du son sont respectivement p_0 et a_0 . De l'autre côté du diaphragme il règne un vide parfait, et donc $a = 0$. Lors de la rupture du diaphragme ($t = t_0$), le gaz s'échappe à grande vitesse dans la partie vide du tube et une onde de détente se propage dans le gaz parfait. Le front de cette onde se déplace à la vitesse $a = a_0$ en accélérant les particules de gaz vers le vide (figure 8a) etc.). En appliquant la relation 4.73 au travers de l'onde simple ainsi créée, c'est-à-dire entre l'état régnant dans le gaz parfait ($u = 0, a = a_0$) et l'état limite du gaz qui s'échappe dans le tube vide ($u = u_{\max}, a = 0$), on obtient

$$u_{\max} = \frac{2}{\kappa - 1} a_0 \quad (4.119)$$

La vitesse maximale résultant d'une onde simple dans une expansion instationnaire est donc considérablement plus élevée que celle obtenue dans un écoulement stationnaire. L'onde simple représentée sur la figure 8 b est donc délimitée dans le plan xt par les lignes $\xi = \text{constantes}$

$$\begin{aligned} x &= -a_0 t \quad (u = 0, a = a_0) \\ x &= \frac{2}{\kappa-1} a_0 t \quad (u = u_{\max}, a = 0) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Puisque u et a sont constantes le long d'une ligne $xt^{-1} = \text{constante}$, la variation de l'état de l'écoulement au travers de cette onde, à un instant $t = t_1$, peut se déduire analytiquement à partir des équations de base. On est donc amené à introduire dans 4.16 et 4.17 une variable indépendante $s = xt^{-1}$ dont u et a deviennent des fonctions. Les dérivées par rapport à x et t d'une fonction $f = f(s)$ s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(s)}{\partial x} &= \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{t} f', \quad f' = \frac{df}{ds} \\ \frac{\partial f(s)}{\partial t} &= \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{s}{t} f' \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

Par conséquent 4.16 et 4.17 sont ramenées à la forme

$$\frac{2}{\kappa-1} (u - s) a' + a u' = 0 \quad (4.122)$$

$$u'(u - s) + \frac{2}{\kappa-1} a a' = 0 \quad (4.123)$$

Une solution de ces équations s'écrit :

$$u = A_1 + A_2 s ; \quad A_1, A_2 = \text{constantes} \quad (4.124)$$

$$a = B_1 + B_2 s ; \quad B_1, B_2 = \text{constantes} \quad (4.125)$$

Par substitution de ces expressions dans 4.122 et 4.123 on obtient :

$$u = A_1 + \frac{2}{\kappa+1} s \quad (4.126)$$

$$a = \mp A_1 \pm \frac{\kappa-1}{\kappa+1} s \quad (4.127)$$

En utilisant la variante de 4.127 où A_1 possède un signe positif, on obtient avec 4.126:

$$u = a + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} s + \frac{2}{\kappa+1} s = a + s \quad (4.128)$$

L'application de la condition $u = 0$ et $a = a_0$ donne pour s la valeur $s = -a_0$. Finalement on déduit de 4.126 la valeur de A_1 :

$$u = 0 = A_1 + \frac{2}{\kappa+1} (-a_0) \quad (4.129)$$

d'où:

$$A_1 = \frac{2}{\kappa + 1} a_0 \quad (4.130)$$

Par conséquent, au travers de l'onde simple les grandeurs u , a et p s'expriment par :

$$\frac{u}{a_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{x}{a_0 t} \right) \quad (4.131)$$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{x}{a_0 t} \right) = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{x}{a_0 t} \right) \quad (4.132)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{x}{a_0 t} \right) \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \quad (4.133)$$

On vérifie la validité des conditions (4.120) à partir de ces dernières expressions. En $x = 0$, correspondant à l'emplacement du diaphragme, on obtient

$$u = a = \frac{2}{\kappa + 1} a_0 \quad (4.134)$$

Donc en $x = 0$, $u = a$ et l'écoulement devient critique à cet endroit du tube. Pourtant, les valeurs de a/a_0 et p/p_0 sont différentes des valeurs correspondantes dans un cas stationnaire. En effet, pour une valeur de $\kappa = 1,4$, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_0} &= \frac{2}{\kappa+1} = 0,833 \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} = 0,279 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Les variations de la vitesse et de la pression dans le tube à l'instant $t = t_1$ exprimées selon (4.131) et (4.133) sont représentées sur la figure 8 (c et d).

4.3 Propagation d'une onde de choc

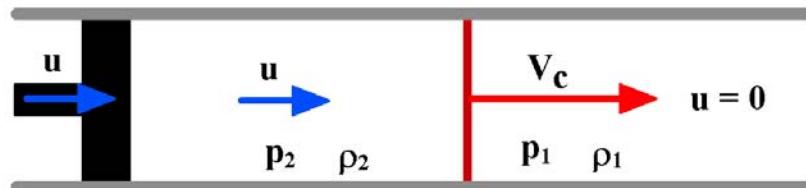


Figure 9 Onde de choc engendré par le mouvement instantané du piston

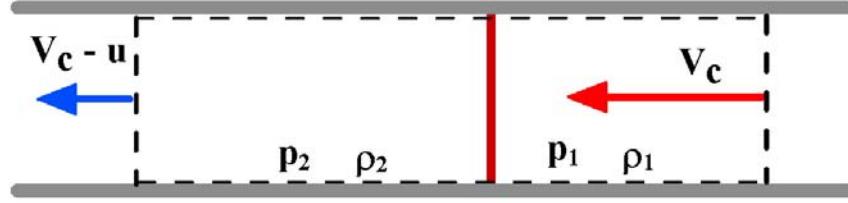


Figure 10 Onde choc dans un repère fixe attaché au choc

Les relations obtenues dans le cours de Mécanique des Fluides Compressible, traduisant la discontinuité des variables au travers d'une onde de choc normale, sont exprimées pour un repère fixe avec le choc. On rappelle quelques relations utiles :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = M_1^{-2} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \right] = \frac{v_2}{v_1} \quad (4.136)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \quad (4.137)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = M_1^{-2} \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \right] \quad (4.138)$$

Pour une onde de choc se propageant à la vitesse V_c dans un gaz parfait au repos, les conditions de saut à travers le choc sont obtenues en appliquant la superposition (figures 9 et 10) :

$$V_c = -v_1, \quad V_c - u = -v_2 \quad (4.139)$$

Compte tenu du déplacement du choc, la vitesse u du gaz devient avec (4.136) :

$$u = -(v_1 - v_2) = V_c \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right) = \frac{2}{\kappa + 1} V_c \left(1 - \frac{a_1^2}{V_c^2} \right) \quad (4.140)$$

Dans (4.136) M_1^2 a donc été remplacé par V_c^2/a_1^2 , où a_1 décrit la vitesse du son dans le gaz au repos. En effectuant la même substitution dans (4.136), (4.137) et (4.138) on obtient :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_1^2}{V_c^2} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c^2}{a_1^2} - 1 \right) \right] = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{a_1^2}{V_c^2} \right) \quad (4.141)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c^2}{a_1^2} - 1 \right) \quad (4.142)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_1^2}{V_c^2} \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c^2}{a_1^2} - 1 \right) \right] \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c^2}{a_1^2} - 1 \right) \right] \quad (4.143)$$

Dans le cas d'une onde de choc forte pour laquelle $V_c/a_1 \gg 1$, on obtient les résultats :

$$u \cong \frac{2}{\kappa + 1} V_c \quad (4.144)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \cong \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}; \frac{p_2}{p_1} \cong \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{V_c^2}{a_1^2}; \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \cong \frac{2\kappa(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)^2} \frac{V_c^2}{a_1^2} \quad (4.145)$$

Dans le cas d'une onde de choc faible on a $(p_2/p_1 - 1) \ll 1$ correspondant à une valeur de $(V_c/a_1 - 1) \ll 1$. On obtient alors les relations suivantes :

$$\frac{u}{V_c} \cong \frac{4}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c}{a_1} - 1 \right) \quad (4.146)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \cong 1 + \frac{4}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c}{a_1} - 1 \right) = 1 + \frac{u}{V_c} \quad (4.147)$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cong 1 + \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c}{a_1} - 1 \right) = 1 + \kappa \frac{u}{V_c} \quad (4.148)$$

$$\frac{T_2}{T_1} \cong 1 + 4 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(\frac{V_c}{a_1} - 1 \right) = 1 + (\kappa - 1) \frac{u}{V_c} \quad (4.149)$$

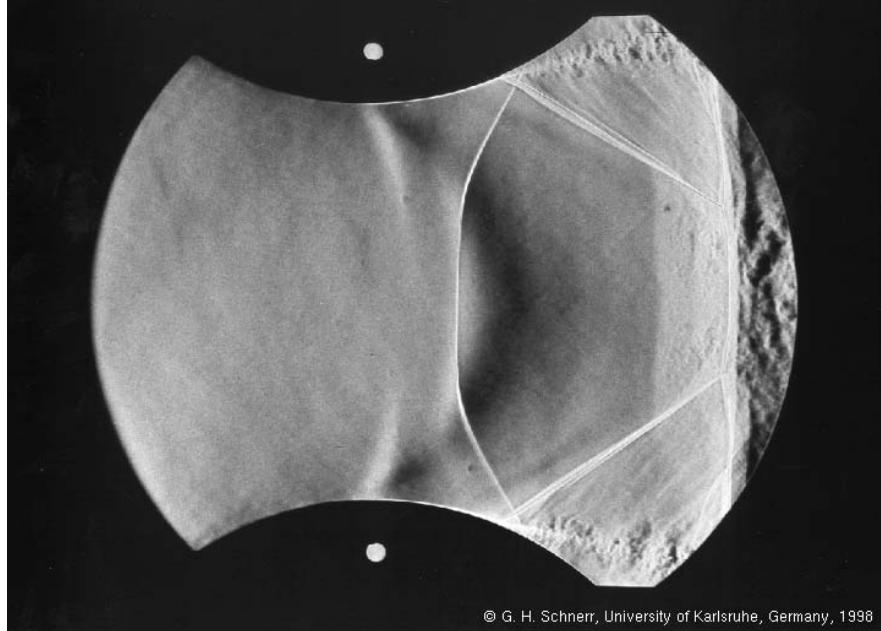


Figure 11 Choc au voisinage d'un col de tuyère

4.4 Etude du tube à choc

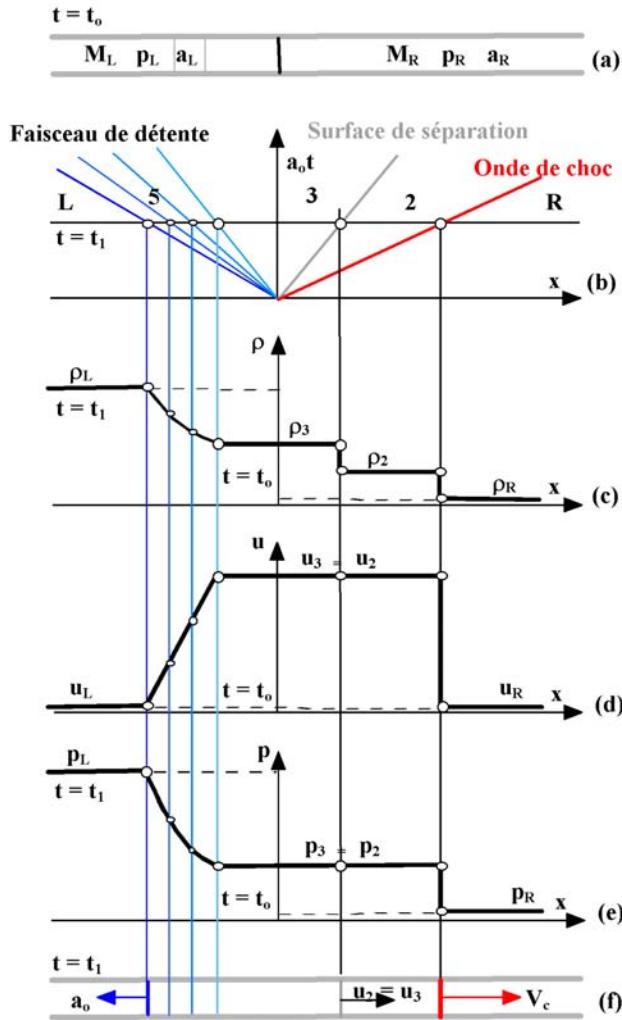


Figure 12 Tube à choc

4.4.1 Principe

Un tube à choc est obtenu en remplaçant dans l'exemple illustré au paragraphe 1.2 le vide par un gaz à basse pression $p_1 \ll p_0$. Lors de la rupture du diaphragme équipant le tube, une onde de choc et une onde de détente se propagent respectivement dans le gaz à basse pression et le gaz à haute pression. Si les deux gaz sont, comme c'est normalement le cas, de nature différente, la surface de séparation entre les deux gaz se propage dans le gaz à basse pression à la manière d'un piston.

L'état caractéristique des zones d'écoulement influencées par chaque type d'onde est représenté sur les figures 12 et 13. Ainsi au temps initial, à la rupture du diaphragme, la distribution de pression est un "saut idéal" limité par les état (L)

et (R) . Cette distribution se décompose, en une onde de choc qui se propage dans la chambre de détente, avec la vitesse V_c , et une onde de détente qui se propage dans la chambre de compression avec la vitesse a_1 sur le front d'onde. On désigne par 2 l'état du fluide traversé par l'onde de choc et par 3 l'état du fluide traversé par l'onde de détente. L'interface entre les régions 2 et 3 est la surface de contact, limite entre les fluides initialement situés de part et d'autre du diaphragme. En négligeant le phénomène de diffusion, les fluides ne se mélangent pas et sont donc séparés en permanence par cette surface de contact ou de séparation. La zone 5 est le domaine de la détente limité par les états L et 3.

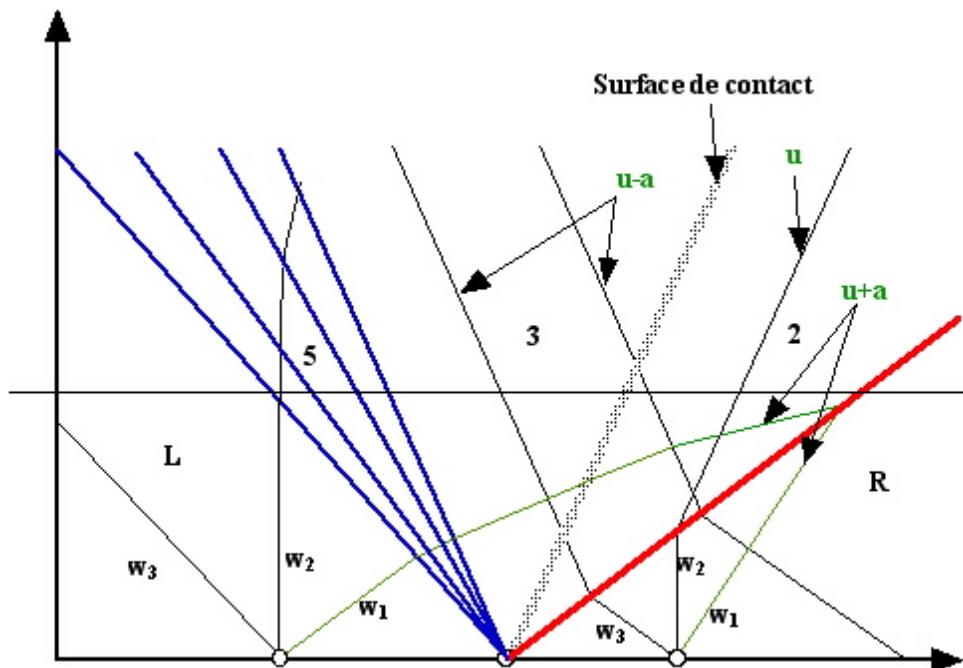


Figure 13 Lignes caractéristiques

On remarquera sur la figure 13 les grandeurs w_1, w_2, w_3 , dans les domaines R et L , représentant les variables caractéristiques dans les directions respective des vecteurs propres $\nu^{(j)}$ associés à chacune des valeurs propres λ_j .

4.4.2 Calculs

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$u = u_L, p = p_L, \rho = \rho_L \quad x < 0, t = 0 \quad (4.150)$$

$$u = u_R, p = p_R, \rho = \rho_R \quad x > 0, t = 0 \quad (4.151)$$

avec :

$$p_R < p_L \quad (4.152)$$

La surface de contact :

Au travers de la surface de séparation, on a les conditions :

$$p_2 = p_3 \quad (4.153)$$

$$u_2 = u_3 \quad (4.154)$$

La zone 3 :

La vitesse u_3 se calcule dans la zone 3 en appliquant l'invariant de Riemann au travers de l'onde simple de détente entre les états L et 3, d'où, le long d'une caractéristique de pente $u + a$ entre les points L et 3 :

$$u_L + \frac{2}{\kappa_L - 1} a_L = u_3 + \frac{2}{\kappa_L - 1} a_3 \quad (4.155)$$

Au travers du choc l'équation de continuité (4.140) s'écrit:

$$u_2 = V_c \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (4.156)$$

Par substitution de (4.155) et (4.156) dans (4.154), on obtient:

$$M_c a_R \left(1 - \frac{\rho_R}{\rho_2} \right) = \frac{2}{\kappa_L - 1} a_L \left(1 - \frac{a_3}{a_L} \right) \quad (4.157)$$

où $M_c = V_c/a_1$ représente le nombre de Mach du choc. Au travers de l'onde simple, la variation de pression est exprimée, en utilisant également (4.153), par:

$$\frac{p_3}{p_L} = \left(\frac{a_3}{a_L} \right)^{\frac{2\kappa_L}{\kappa_L - 1}} = \frac{p_2}{p_L} \quad (4.158)$$

Onde de choc :

Au travers du choc l'équation de continuité (4.156) s'écrit

$$u_2 = V_c \left(1 - \frac{\rho_R}{\rho_2} \right) \quad (4.159)$$

Les valeurs du saut de densité et de pression au travers du choc sont fournies par:

$$1 - \frac{\rho_R}{\rho_2} = \frac{2}{\kappa_1 + 1} \frac{M_c^2 - 1}{M_c^2} \quad (4.160)$$

$$\frac{p_2}{p_R} = 1 + \frac{2\kappa_1}{\kappa_1 + 1} (M_c^2 - 1) \quad (4.161)$$

Zône 5 :

Dans la région 5, domaine de la détente formé des caractéristiques centrées de pente $u_5 - a_5$, les informations sont transmises le long des caractéristiques de pente $u_5 + a_5$, on a donc, pour un point 5 quelconque $L < 5 < 3$:

$$u_L + \frac{2}{\kappa_L - 1} a_L = u_5 + \frac{2}{\kappa_L - 1} a_5 \quad (4.162)$$

et :

$$\frac{p_5}{p_L} = \left(\frac{a_5}{a_L} \right)^{\frac{2\kappa_L}{\kappa_L - 1}} \quad (4.163)$$

On a aussi, le long de $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = u_5 - a_5$:

$$u_5 - \frac{2}{\kappa_L - 1} a_5 = Cte \quad (4.164)$$

Chaque caractéristique étant définie par :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa_L + 1}{2} u_5 - a_L - \frac{\kappa_L - 1}{2} u_L \quad (4.165)$$

Comme $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$, on a:

$$-(u_L + a_L) < \frac{x}{t} < \frac{\kappa_L + 1}{2} u_3 + a_L + \frac{\kappa_L - 1}{2} u_L \quad (4.166)$$

Relation du tube à choc

Ainsi, la combinaison de (4.161) et (4.158) fournit pour p_L/p_R la relation

$$\frac{p_L}{p_R} = \left[1 + \frac{2\kappa_R}{\kappa_R + 1} (M_c^2 - 1) \right] \left(\frac{a_3}{a_L} \right)^{-\frac{2\kappa_L}{\kappa_L - 1}} \quad (4.167)$$

De plus, en utilisant (4.157), a_3/a_L peut être exprimée en fonction de M_c . On obtient ainsi la relation fondamentale du tube à choc

$$\frac{p_L}{p_R} = \left[1 + \frac{2\kappa_R}{\kappa_R + 1} (M_c^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{a_R}{a_L} \frac{\kappa_L - 1}{\kappa_1 + 1} \frac{M_c^2 - 1}{M_c} \right]^{-\frac{2\kappa_L}{\kappa_L - 1}} \quad (4.168)$$

Cette relation démontre qu'on peut obtenir des nombres de Mach élevés dans un tube à choc. Ceci se produit avec de très grandes valeurs de p_4/p_1 . En effet, à la limite quand $p_L/p_R \rightarrow \infty$, on obtient

$$\frac{M_c^2 - 1}{M_c} = \frac{\kappa_R + 1}{\kappa_L - 1} \frac{a_L}{a_R} = \frac{\kappa_R + 1}{\kappa_L - 1} \left(\frac{\kappa_L \mathcal{M}_{R1} T_L}{\kappa_R \mathcal{M}_L T_R} \right)^{1/2} \quad (4.169)$$

Dans la pratique $T_L = T_R \cong 300$ K. Par conséquent, pour obtenir un nombre de Mach M_c élevé il faut que $\mathcal{M}_R/\mathcal{M}_L$ soit aussi grand que possible. En utilisant comme gaz moteur un gaz léger, par exemple l'hydrogène ($\mathcal{M}_L = 2$ et $\kappa_L = 1,4$), et comme gaz de refoulement un gaz lourd, par exemple l'argon ($\mathcal{M}_R = 40$ et $\kappa_R = 1,66$), on obtient $M_c \cong 27$. Dans un tel cas le saut de température théorique pour un gaz parfait devient selon (4.149)

$$\frac{T_2}{T_R} \cong \frac{2\kappa_{R1}(\kappa_R - 1)}{(\kappa_R + 1)^2} M_c^2 = 234 \quad (4.170)$$

De ce fait, le tube à choc peut servir à étudier les phénomènes liés aux gaz à hautes températures comme, par exemple, l'ionisation et les effets de relaxation.

Chapter 5

INTRODUCTION AU PROBLÈME DE RIEMANN

On vient de voir, par l'étude du tube à choc et tout particulièrement du choc lui-même que au temps $t=0$, on se trouve avec un discontinuité avec à gauche des valeurs (indice L) constantes et à droite des valeurs (indice R) constantes. Un tel problème s'appelle aussi problème de Riemann. Il est important d'approfondir les propriétés au voisinage de cette discontinuité lors de la mise en place de méthode de discréétisation. En effet, lorsque on utilisera des formulations numériques conservatives, en particulier à distribution à valeurs constantes par morceaux, et cela même si le problème à résoudre est continu, au bord de chaque cellule apparaissent automatiquement des discontinuités (plateau de valeurs constantes différentes d'une cellule à l'autre). C'est en particulier pour traiter ces discontinuités non physique en plus des chocs qui peuvent naturellement apparaître que la méthode de Riemann est importante à analyser.

5.1 Etude théorique

5.1.1 L'équation de convection scalaire linéaire

Considérons le problème simple suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (5.1)$$

avec :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (5.2)$$

Les caractéristiques

Dans le domaine $x-t$, les caractéristiques peuvent être considérées comme des courbes telles que $x = x(t)$. Par conséquent, comme $u = u(x, t)$, on peut aussi écrire :

$$u(x, t) = u(x(t), t) \quad (5.3)$$

Le taux de variation de u le long d'une courbe $x = x(t)$ s'écrit alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.4)$$

Or, si l'on veut que la courbe $x = x(t)$ soit une caractéristique et par suite satisfasse l'équation scalaire 5.1, on doit avoir :

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (5.5)$$

On en déduit alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

Par conséquent, le taux de variation de u le long de la courbe $x = x(t)$ est nul : u est donc constant le long de la courbe $x = x(t)$. Etant donnée la condition initiale $x = x_0$ au temps $t = 0$, on a immédiatement que la caractéristique associée à notre équation scalaire passant par le point $x = x_0, t = 0$ est la droite :

$$x = x_0 + at \quad (5.7)$$

Ainsi pour une famille de points $x_{0,j}$, on obtient une famille de caractéristiques formant un ensemble de droites parallèles (figure 1); toutes les droites ayant la même pente $1/a$, ce qui est typique d'une équation scalaire. D'après la propriété que u est constant le long de $x = x(t)$, on en déduit :

$$u(x, t) = u_0(x_{0,j}) = u_{0,j}(x - at) \quad (5.8)$$

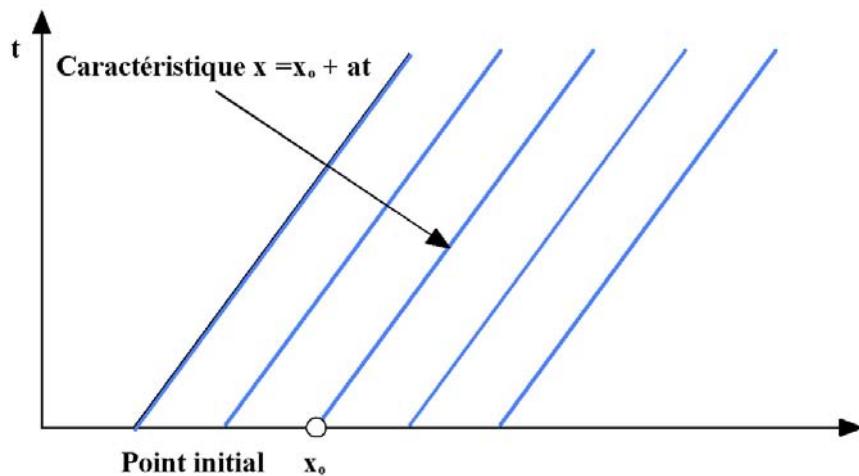


Figure 1 Caractéristique pour l'équation scalaire linéaire

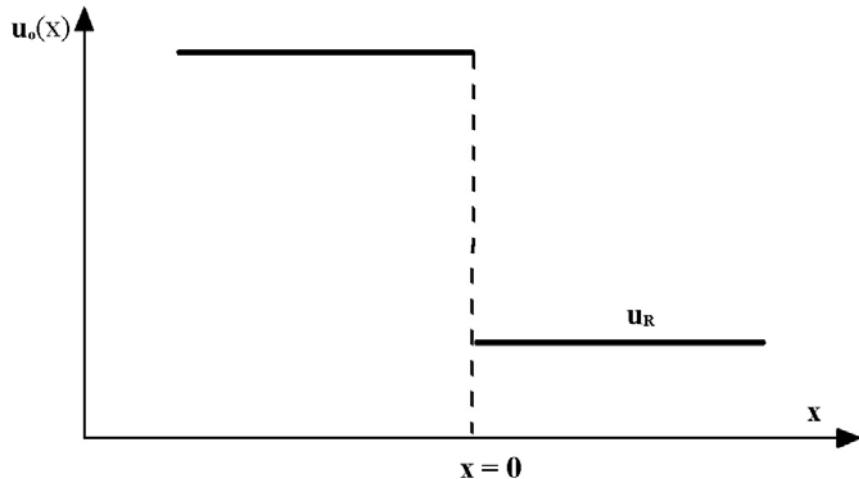


Figure 2 Problème de Riemann

Le problème de Riemann

Considérons maintenant le problème suivant (figure 2), appelé problème de Riemann pour l'équation scalaire:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (5.9)$$

avec :

$$u(x, 0) = u_0(x) \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

D'après l'étude précédente, la solution au problème de Riemann est avec 5.8:

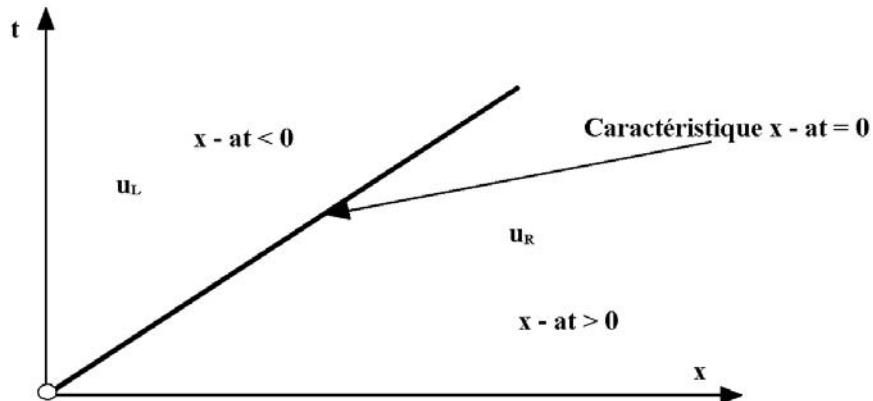


Figure 3 Solution du problème de Riemann

$$u(x, t) = u_0(x - at) \begin{cases} u_L & \text{si } x - at < 0 \\ u_R & \text{si } x - at > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

soit la figure 3.

5.1.2 L'équation de convection scalaire non-linéaire

Considérons ensuite le problème suivant, avec l'équation de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = 0 \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (5.12)$$

avec :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (5.13)$$

L'équation de conservation peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + f' \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.14)$$

où $\frac{df}{du} = \lambda(u)$ est **la vitesse caractéristique**. Dans le cas de l'équation scalaire, $\frac{df}{du} = a$ et avec l'équation de Burgers $\frac{df}{du} = u$. Le comportement de la fonction $f(u)$ à des conséquences importantes sur celui de la solution. Une propriété très importante, qui sera utilisée plus loin, est la monotonie de la vitesse caractéristique $\frac{dx}{dt} = \lambda(u) = \frac{df}{du} = f'(u)$. On a trois possibilités :

1. $\lambda(u)$ est une fonction monotone croissante de u :

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = \lambda'(u) = f''(u) > 0 \quad \text{flux convexe} \quad (5.15)$$

2. $\lambda(u)$ est une fonction monotone décroissante de u :

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = \lambda'(u) = f''(u) < 0 \quad \text{flux concave} \quad (5.16)$$

3. $\lambda(u)$ a des extréma :

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = \lambda'(u) = f''(u) = 0 \quad \text{flux ni concave ni convexe} \quad (5.17)$$

Les caractéristiques

Dans le domaine $x - t$, comme dans le cas linéaire, les caractéristiques peuvent être tout simplement considérées comme des courbes telles que $x = x(t)$. Par conséquent, on peut aussi écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(u) = f'(u) \quad (5.18)$$

Le taux de variation de u le long d'une courbe $x = x(t)$ s'écrit alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.19)$$

Par suite, le taux de variation de u le long de la courbe $x = x(t)$ est nul : u est donc constant le long de la courbe $x = x(t)$. Etant donné la condition initiale $x(0) = x_0$ au temps $t = 0$, on a immédiatement que la caractéristique associée à notre équation scalaire passant par le point $x = x_0$, $t = 0$ est la droite :

$$x = x_0 + \lambda(u_0(x_0))t \quad (5.20)$$

Ainsi, pour une famille de points x_0 , on obtient une famille de caractéristiques formant un ensemble de droites (figure 4); les droites ont la pente $1/\lambda(u_0(x_0))$. D'après la propriété que u est constant le long de $x = x(t)$, on en déduit :

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - \lambda(u_0(x_0))t) \quad (5.21)$$

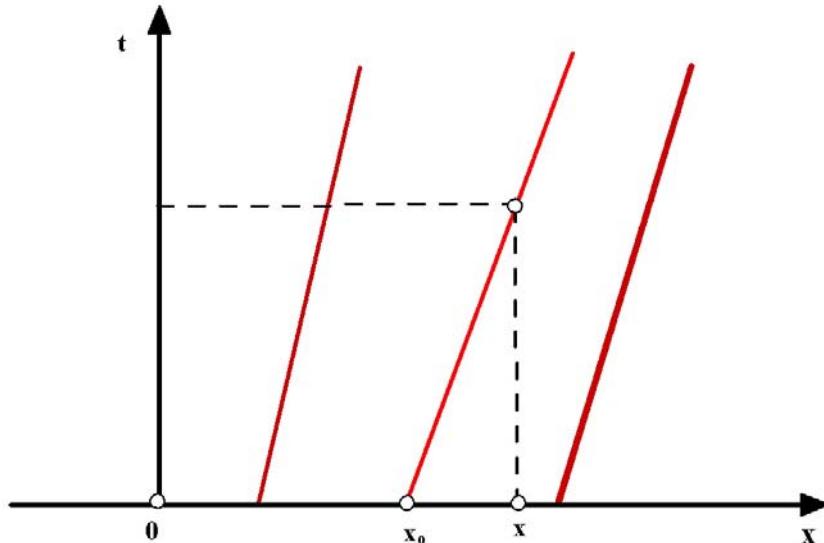


Figure 4 Caractéristique pour l'équation scalaire non linéaire

Le problème de Riemann pour l'équation non linéaire de Burgers

Considérons maintenant le problème de Riemann appliquée à l'équation de Burgers non linéaire:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (5.22)$$

avec :

$$u(x, 0) = u_0(x) \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Cas où $u_L > u_R$: Supposons tout d'abord que $u_L > u_R$. Comme le flux $f(u)$ est convexe les vitesses des caractéristiques dans le domaine de gauche sont plus grandes que celles dans le domaine de droite. Par suite :

$$\lambda_L = \lambda(u_L) > \lambda_R = \lambda(u_R) \quad (5.24)$$

On obtient la figure 5. La solution au problème de Riemann est :

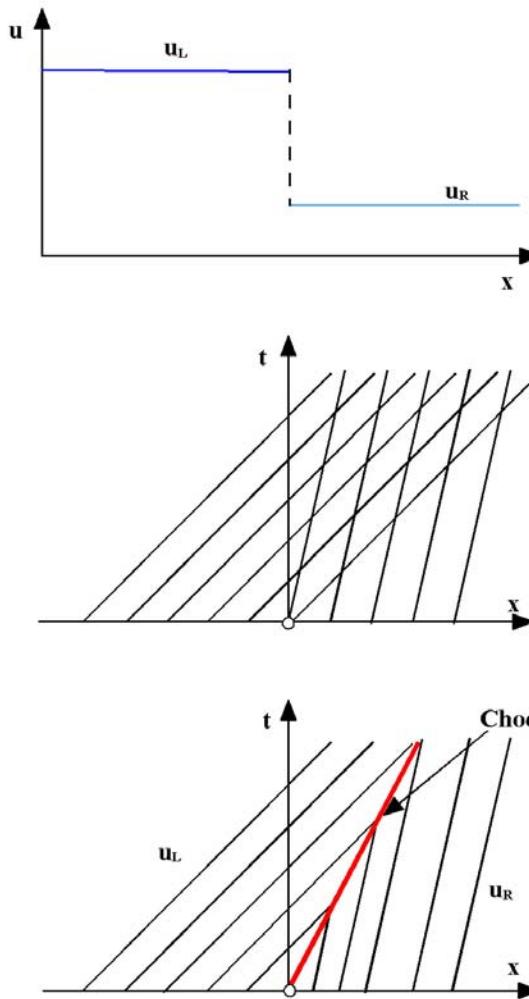


Figure 5 Le problème de Riemann pour l'équation non linéaire de Burgers

$$u(x, t) = u_0(x - ut) \begin{cases} u_L & \text{si } x - V_c t < 0 \\ u_R & \text{si } x - V_c t > 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

où V_c est la vitesse de propagation du choc :

$$V_c = \frac{1}{2} (u_L + u_R)$$

On remarquera que les caractéristiques dans chaque région où u est constant se dirigent vers le choc lorsque le temps évolue.

Cas où $u_L < u_R$ Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. L'une d'elles est de nouveau (figure 6):

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - V_c t < 0 \\ u_R & \text{si } x - V_c t > 0 \end{cases}$$

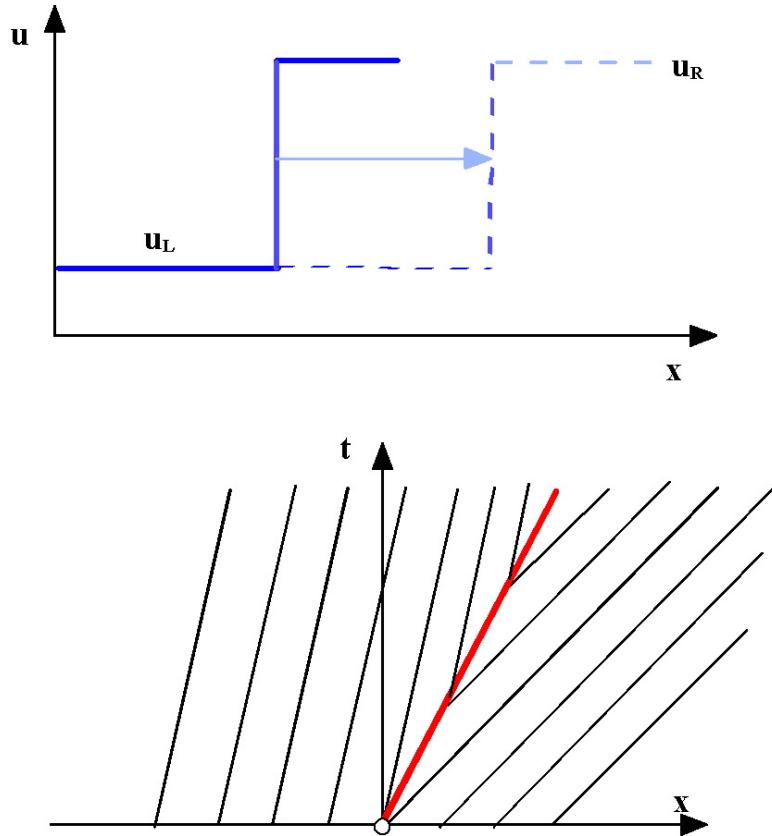


Figure 6 Onde de choc violent le second principe

Le choc se déplace à la vitesse V_c . Mais dans ce cas, les caractéristiques s'éloignent du choc. Cette solution est instable et viole le second principe de la

thermodynamique. Une autre solution est l'onde de détente (figure 7):

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < u_L t \\ x/t & \text{si } u_L t \leq x \leq u_R t \\ u_R & \text{si } x > u_R t \end{cases} \quad (5.26)$$

Cette solution est stable.

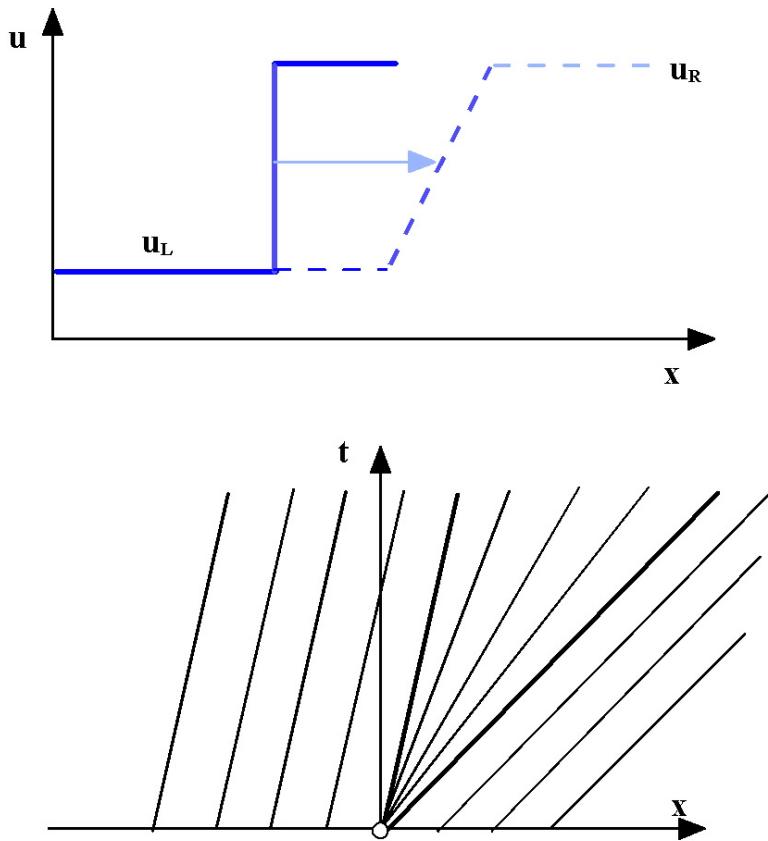


Figure 7 Onde de détente

5.1.3 Système d'équations

Considérons maintenant le problème suivant consistant en m équations scalaires hyperboliques.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.27)$$

La matrice \mathcal{A} possède m valeurs propres réelles λ_j et par conséquent m vecteurs propres $\nu^{(j)}$.

Diagonalisation

On suppose que la matrice \mathcal{A} est diagonalisable, c'est à dire que l'on peut écrire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{R}^{-1} \quad (5.28)$$

avec :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{m-1} \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

et :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \nu^{(1)}, & \nu^{(2)}, & \dots, & \nu^{(m-1)}, & \nu^{(m)} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

avec la propriété :

$$\mathcal{A}\nu^{(i)} = \lambda_i \nu^{(i)} \quad (5.31)$$

Variables caractéristiques

On introduit alors les m variables caractéristiques w_j en utilisant la transformation suivante :

$$\mathbf{w} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u} \quad (5.32)$$

Multiplions l'équation 5.27 par la matrice \mathcal{R}^{-1}

$$\mathcal{R}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] = \mathcal{R}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.33)$$

Comme la matrice \mathcal{A} est constante, il en est de même de \mathcal{K} et par suite on peut écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \quad (5.34)$$

ou :

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (5.35)$$

On a donc découplé le système 5.27. Chacune des équations est équivalente à l'équation de convection 5.27. La vitesse des caractéristiques est maintenant λ_j et on a m caractéristiques satisfaisant les relations :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j \quad (5.36)$$

Le problème aux valeurs initiales

On a maintenant un problème avec m conditions initiales :

$$\mathbf{u}_0 = [u_{1,0}, u_{2,0}, \dots, u_{m,0}]^T \quad (5.37)$$

Introduisant les variables caractéristiques pour les conditions initiales :

$$\mathbf{w}_0 = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (5.38)$$

Chacune des solutions aux équations $\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0$ s'écrit avec 5.21 :

$$w_j(x, t) = w_{j,0}(x - \lambda_j t), j = 1, \dots, m \quad (5.39)$$

Pour obtenir la solution \mathbf{u} , il suffit d'écrire que :

$$\mathbf{u} = \mathcal{R} \mathbf{w} \quad (5.40)$$

soit :

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 \nu_1^{(1)} + w_2 \nu_1^{(2)} + \dots + w_m \nu_1^{(m)} \\ u_i &= w_1 \nu_i^{(1)} + w_2 \nu_i^{(2)} + \dots + w_m \nu_i^{(m)} \\ u_m &= w_1 \nu_m^{(1)} + w_2 \nu_m^{(2)} + \dots + w_m \nu_m^{(m)} \end{aligned} \quad (5.41)$$

ou:

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^m w_j(x, t) \nu^{(j)} \quad (5.42)$$

Ainsi la fonction $w_j(x, t)$ est le coefficient de $\nu^{(j)}$ dans un développement de $\mathbf{u}(x, t)$ en fonction des vecteurs propres. Mais comme avec 5.21 :

$$w_j(x, t) = w_{j,0}(x - \lambda_j t) \quad (5.43)$$

on a :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^m w_{j,0}(x - \lambda_j t) \nu^{(j)} \quad (5.44)$$

Par conséquent, étant donné un point x, t , la solution $\mathbf{u}(x, t)$ en ce point ne dépend que des conditions initiales aux m points $x_{0,j} = x - \lambda_j t$. Ce sont les intersections avec l'axe des x des caractéristiques de pentes λ_j .

Le problème de Riemann

Le problème de Riemann appliqué à un système d'équations est alors le suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (5.45)$$

avec :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

On suppose alors que l'on a m valeurs propres λ_j toutes réelles et ordonnées :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_m \quad (5.47)$$

Dans le plan $x - t$, on a les caractéristiques suivantes issues de l'origine (figure 8):

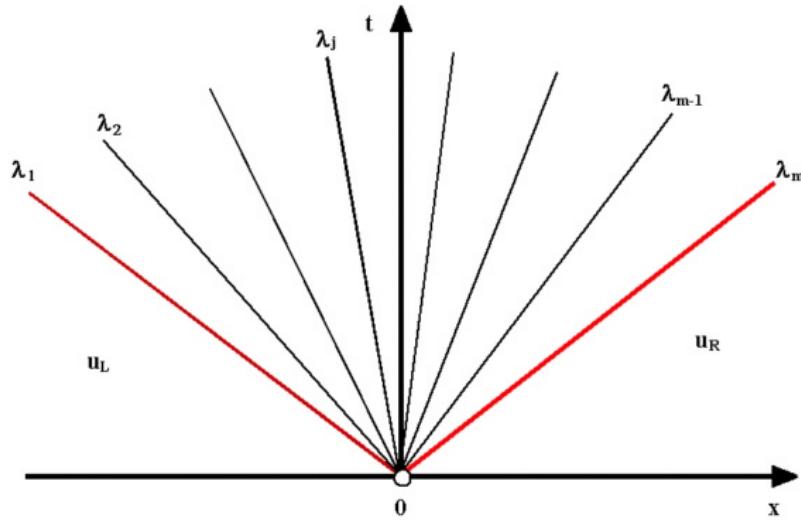


Figure 8 Caractéristiques

Chaque caractéristique propage un saut de \mathbf{u} à la vitesse λ_j . A la gauche de λ_1 l'état est constant, caractérisé par \mathbf{u}_L . A droite de λ_m il est aussi constant et est caractérisé par l'état \mathbf{u}_R . On cherche alors à déterminer \mathbf{u} en un point (x, t) situé entre les deux caractéristiques extrêmes. On décompose les états \mathbf{u}_R et \mathbf{u}_L en fonction des vecteurs propres $\nu^{(j)}$ qui sont linéairement indépendants :

$$\mathbf{u}_L = \sum_{j=1}^m \alpha_j \nu^{(j)} \quad (5.48)$$

et :

$$\mathbf{u}_R = \sum_{j=1}^m \beta_j \nu^{(j)} \quad (5.49)$$

où les coefficients α_j et β_j sont constants. On peut alors calculer le saut entre les deux états extrêmes R et L :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) \nu^{(j)} \quad (5.50)$$

L'intensité de l'onde j est $\alpha_j - \beta_j$ et le saut à travers l'onde j est :

$$(\Delta \mathbf{u})_j = (\beta_j - \alpha_j) \nu^{(j)} \quad (5.51)$$

Ces sauts satisfont la condition de Rankine-Hugoniot puisque avec :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathcal{A} \mathbf{u} \quad (5.52)$$

on a :

$$[\mathbf{f}(\mathbf{u})]_j = \mathcal{A} [\mathbf{u}]_j = (\beta_j - \alpha_j) \mathcal{A} \nu^{(j)} = (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j \nu^{(j)} \quad (5.53)$$

soit :

$$[\mathbf{f}(\mathbf{u})]_j = \lambda_j (\beta_j - \alpha_j) \nu^{(j)} = \lambda_j (\Delta \mathbf{u})_j \quad (5.54)$$

où λ_j est la vitesse de propagation de ce saut. Si on exprime alors le problème en fonction des variables caractéristiques, on a pour chaque λ_j l'équation :

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0 \quad (5.55)$$

En comparant les équations 5.46, 5.48 et 5.49, on a :

$$w_{j,0}(x) = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } x < 0 \\ \beta_j & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

Par suite :

$$w_j(x, t) = w_{j,0}(x - \lambda_j t) = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } x - \lambda_j t < 0 \\ \beta_j & \text{si } x - \lambda_j t > 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

Finalement la solution \mathbf{u} pour un point (x, t) quelconque devient :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=J+1}^m \alpha_j \nu^{(j)} + \sum_{j=1}^J \beta_j \nu^{(j)} \quad (5.58)$$

où J est la valeur maximum de j pour laquelle $x - \lambda_j t > 0$. On peut aussi écrire :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_L + \sum_{\lambda_j < x/t}^J (\beta_j - \alpha_j) \nu^{(j)} \quad (5.59)$$

ou :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_R - \sum_{\lambda_j < x/t}^J (\beta_j - \alpha_j) \nu^{(j)} \quad (5.60)$$

5.2 Applications

5.2.1 Système linéarisée de la dynamique des gaz

Considérons à titre d'application le problème suivant consistant en $m = 2$ équations scalaires hyperboliques.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad (5.61)$$

ou :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.62)$$

La matrice \mathcal{A} possède 2 valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 par conséquent 2 vecteurs propres $\nu^{(1)}$ et $\nu^{(2)}$. On réécrira le système sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.63)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{bmatrix} u_1(x, 0) \\ u_2(x, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,0}(x) \\ u_{2,0}(x) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Diagonalisation

On vérifie que la matrice \mathcal{A} est diagonalisable, c'est à dire que l'on peut écrire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \mathcal{D} \mathcal{R}^{-1} \quad (5.65)$$

avec :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

et :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \nu^{(1)} & \nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -a & a \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

ainsi que :

$$\mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{2a\rho_0} \begin{bmatrix} a & -\rho_0 \\ a & \rho_0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Variables caractéristiques

On introduit alors les 2 variables caractéristiques w_1 et w_2 en utilisant la transformation :

$$\mathbf{w} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u} \quad (5.69)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a\rho_0} \begin{bmatrix} a & -\rho_0 \\ a & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho/\rho_0 - u/a \\ \rho/\rho_0 + u/a \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

On a:

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, j = 1, 2 \quad (5.71)$$

soit :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - a \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (5.72)$$

$$dt \frac{\partial w_1}{\partial t} + dx \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow dw_1 = 0 \Rightarrow d\rho/\rho_0 - du/a = 0 \quad (5.73)$$

et:

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + a \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (5.74)$$

$$dt \frac{\partial w_2}{\partial t} + dx \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \Rightarrow dw_2 = 0 \Rightarrow d\rho/\rho_0 + du/a = 0 \quad (5.75)$$

On a donc découpé le système initial. La vitesse des caractéristiques est maintenant $\pm a$ et on a 2 caractéristiques satisfaisant les relations :

$$\frac{dx}{dt} = -a, \frac{dx}{dt} = a \quad (5.76)$$

Le problème aux valeurs initiales

On a un problème avec 2 conditions initiales :

$$\mathbf{u}_0 = [u_{1,0}, u_{2,0}]^T \quad (5.77)$$

Introduisant les variables caractéristiques pour les conditions initiales :

$$\mathbf{w}_0 = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}_0 \quad (5.78)$$

soient :

$$w_{1,0}(x) = \frac{1}{2a\rho_0} [au_{1,0}(x) - \rho_0 u_{2,0}(x)] \quad (5.79)$$

$$w_{2,0}(x) = \frac{1}{2a\rho_0} [au_{1,0}(x) + \rho_0 u_{2,0}(x)] \quad (5.80)$$

Chacune des solutions aux équations $\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0$ s'écrit avec 5.57 :

$$w_j(x, t) = w_{j,0}(x - \lambda_j t), j = 1, \dots, 2 \quad (5.81)$$

soient :

$$w_1(x, t) = w_{1,0}(x + at) \quad (5.82)$$

$$w_2(x, t) = w_{2,0}(x - at) \quad (5.83)$$

et avec 5.79 et 5.80 :

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2a\rho_0} [au_{1,0}(x + at) - \rho_0 u_{2,0}(x + at)] \quad (5.84)$$

$$w_2(x, t) = \frac{1}{2a\rho_0} [au_{1,0}(x - at) + \rho_0 u_{2,0}(x - at)] \quad (5.85)$$

Pour obtenir la solution \mathbf{u} , il suffit d'écrire que :

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}\mathbf{w} \quad (5.86)$$

ou :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, t) \nu^{(j)} = \sum_{j=1}^2 w_{j,0}(x - \lambda_j t) \nu^{(j)} \quad (5.87)$$

soit :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2a} [au_{1,0}(x + at) - \rho_0 u_{2,0}(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} [au_{1,0}(x - at) + \rho_0 u_{2,0}(x - at)] \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -\frac{1}{2a} [au_{1,0}(x + at) - \rho_0 u_{2,0}(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} [au_{1,0}(x - at) + \rho_0 u_{2,0}(x - at)] \end{aligned} \quad (5.89)$$

Le problème de Riemann

A partir de l'origine dans le plan $x - t$, deux ondes se déplacent avec les vitesses $\lambda_1 = \frac{dx}{dt} = -a$ et $\lambda_2 = \frac{dx}{dt} = a$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2$. La solution à la gauche de la caractéristique définie par λ_1 est l'état constant :

$$\mathbf{u}_L = \alpha_1 \nu^{(1)} + \alpha_2 \nu^{(2)} \quad (5.90)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ -a \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ a \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

On en déduit les valeurs de α_1 et α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{a\rho_L - \rho_0 u_L}{2a\rho_0}, \alpha_2 = \frac{a\rho_L + \rho_0 u_L}{2a\rho_0} \quad (5.92)$$

et la solution à la droite de la caractéristique définie par λ_2 est l'état constant:

$$\mathbf{u}_R = \beta_1 \nu^{(1)} + \beta_2 \nu^{(2)} \quad (5.93)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ -a \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ a \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

On en déduit les valeurs de β_1 et β_2 :

$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}, \beta_2 = \frac{a\rho_R + \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \quad (5.95)$$

Il est alors possible de trouver la solution pour u et ρ dans la région comprise entre les caractéristiques associées à λ_1 et λ_2 . Considérons un point P situé dans ce

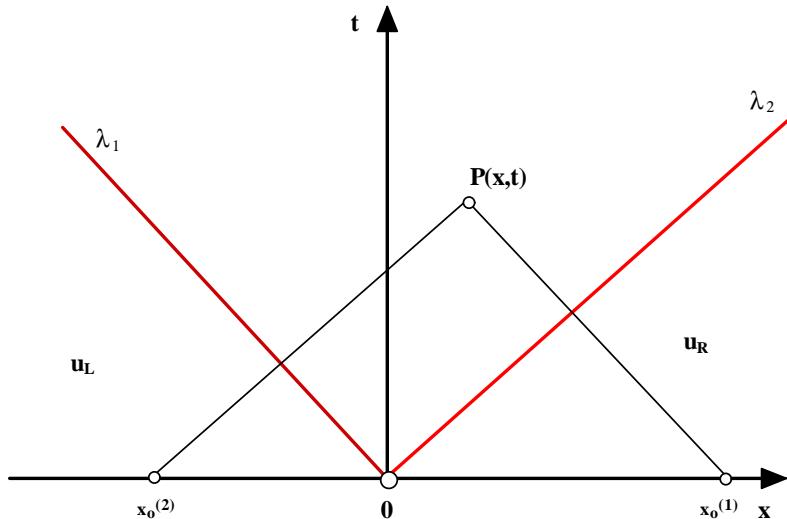


Figure 9 Recherche de la solution en P

domaine (figure 9). Traçons deux droites parallèles respectivement à chacune des caractéristiques. L'une coupe l'axe des x en $x_{1,0} = x - \lambda_2 t = x - at$ et l'autre en $x_{2,0} = x - \lambda_1 t = x + at$. Par conséquent, les coefficients de la relation déterminant \mathbf{u} sont alors connus. En effet, pour choisir correctement les coefficients, on choisit un temps t quelconque et un point x_L à gauche de la caractéristique λ_1 , \mathbf{u}_L est alors défini par 5.90.

$$\mathbf{u}_L = \alpha_1 \nu^{(1)} + \alpha_2 \nu^{(2)} \quad (5.96)$$

Le point (x_L, t) est tel que tous les coefficients de 5.90 sont des α_j . Lorsqu'on se déplace vers la droite (figure 10), au passage de la caractéristique λ_1 , $x - \lambda_1 t$ change

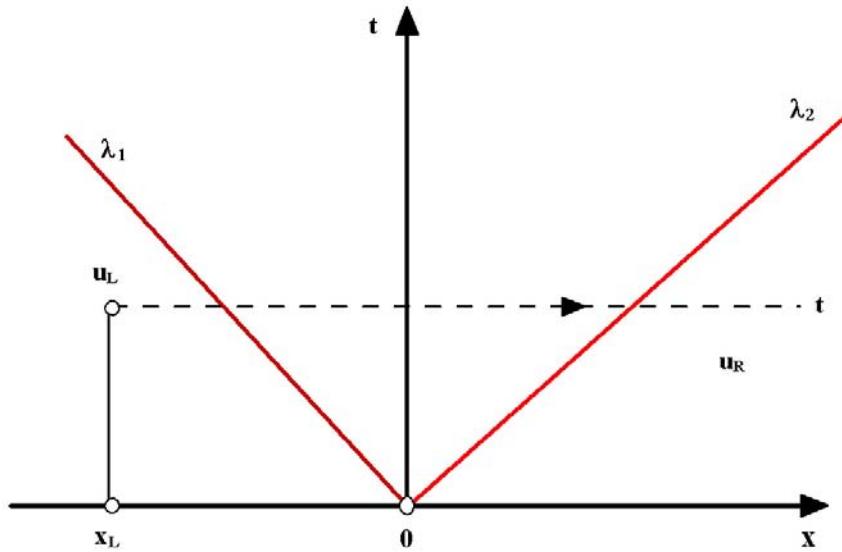


Figure 10 Recherche des coefficients

de signe et devient positif et par suite le coefficient d'après 5.93 se change en β_1 . Par conséquent, la solution devient :

$$\mathbf{u} = \beta_1 \nu^{(1)} + \alpha_2 \nu^{(2)} \quad (5.97)$$

soit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} &= \beta_1 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ -a \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \rho_0 \\ a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} &= \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ -a \end{bmatrix} + \frac{a\rho_L + \rho_0 u_L}{2a\rho_0} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\rho_R + \rho_L) \\ (u_R + u_L) \end{bmatrix} - \frac{\rho_0}{2a} \begin{bmatrix} (u_R - u_L) \\ (\rho_R - \rho_L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Enfin lorsqu'on traverse la caractéristique de pente λ_2 on obtient :

$$\mathbf{u}_R = \beta_1 \nu^{(1)} + \beta_2 \nu^{(2)} \quad (5.99)$$

On en déduit avec 5.96 le saut entre l'état R et l'état L :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = (\beta_1 - \alpha_1) \nu^{(1)} + (\beta_2 - \alpha_2) \nu^{(2)} \quad (5.100)$$

Part II

Construction de schémas d'ordre supérieur

Chapter 6

SCHÉMAS DE DISCRÉTISATION AUX DIFFÉRENCES FINIES CLASSIQUES

On suppose connus les concepts de base des méthodes numériques (cours de Simulation Numérique B) pour les équations aux dérivées partielles, en particulier pour les équations hyperboliques :

- *Les erreurs de troncature*
- *La précision d'un schéma*
- *La consistance*
- *L'équation modifiée*
- *La stabilité*
- *La convergence*
- *Les erreurs de dissipation et de dispersion*

6.1 L'équation scalaire de convection linéaire

Considérons un problème aux valeurs initiales et aux limites pour l'équation de convection scalaire, dans le domaine $[0, L] \times [0, T]$ du plan $x - t$, soit :

- Equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, a > 0 \quad (6.1)$$

- Condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (6.2)$$

Conventions :

- u , ou \mathbf{u} seront les notations utilisées pour la solution exacte de l'équation ou du système d'équations à résoudre. En un point j , la solution exacte sera notée : u_j ou \mathbf{u}_j
- \hat{U} ou $\hat{\mathbf{U}}$ seront les notations utilisées pour la solution exacte de l'équation modifiée. En un point j , la solution exacte sera notée : \hat{U}_j ou $\hat{\mathbf{U}}_j$
- U_j^n ou \mathbf{U}_j^n seront les notations utilisées pour la solution approximative après n itérations de l'équation discrète ou du système d'équations discrètes à résoudre. Aux points discrets j , on notera : U_j^n ou \mathbf{U}_j^n
- Ainsi en un point j :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j, \mathbf{u}_j & \text{solution exacte de l'équation continue} \\ \hat{U}_j, \hat{\mathbf{U}}_j & \text{solution exacte de l'équation discrétisée} \\ U_j^n, \mathbf{U}_j^n & \text{solution approchée de l'équation discrétisée} \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

6.2 Principe de discrétisation

Le principe de la discrétisation consiste à remplacer un problème continu, représenté, par exemple, par une équation aux dérivées partielles, au moyen d'un ensemble fini de valeurs discrètes. Pour cela on discrétise tout d'abord le domaine de calcul, en un ensemble fini de points (méthode aux différences finies) ou de volume (méthodes aux volumes fins) définissant un maillage. Dans l'approche aux différences finies ces valeurs sont des valeurs ponctuelles définies aux points de la grille. Pour la méthode aux volumes finis, les valeurs discrètes sont des valeurs moyennes de distribution constantes ou linéaires par morceau sur des volumes finis. Nous introduirons tout d'abord les principes de discrétisation par la méthode aux différences finies. Soit une grille régulière en espace et en temps. On introduit l'espace régulier des points espacés de Δx sur le domaine $[0, L]$ en introduisant M points tels que :

$$\Delta x = \frac{L}{M} \quad (6.4)$$

et l'espace régulier dans la direction temporelle Δt sur le domaine $[0, T]$. Les points de la grille sont alors positionnés en $(j\Delta x, n\Delta t)$ dans le plan $x-t$ avec $j = 1, \dots, M$ et $n = 0, 1, \dots, N$. Par conséquent, les valeurs discrètes de la fonction $u(x, t)$ en $(j\Delta x, n\Delta t)$ sont définies par :

$$U_j^n = U(j\Delta x, n\Delta t) = U(x_j, t^n) \quad (6.5)$$

L'observation du domaine de discrétisation (figure 1) montre que :

- pour la discrétisation de la dérivée temporelle une différence progressive peut être utilisée :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \simeq \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \quad (6.6)$$

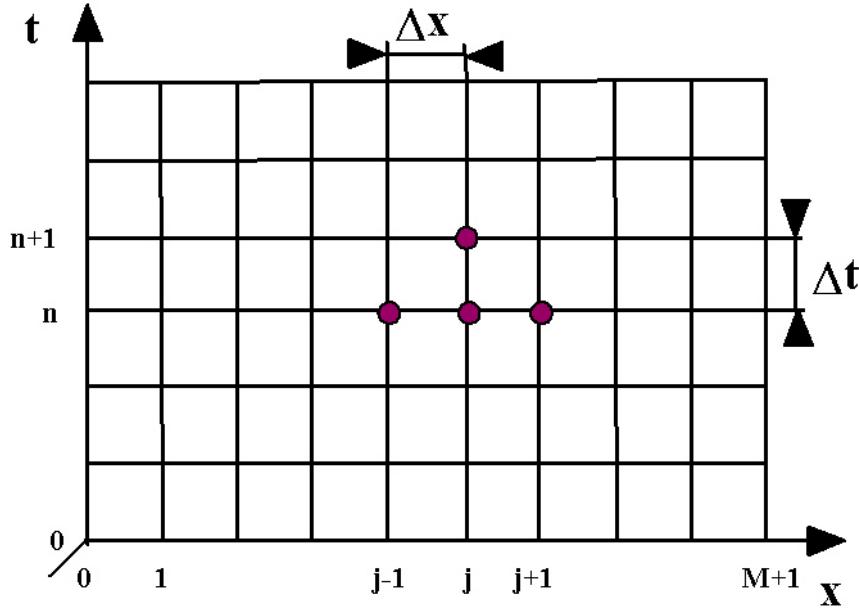


Figure 1 Domaine de discréétisation

où U_j^{n+1} est la nouvelle valeur que l'on cherche, U_j^n étant connu $\forall j = 1, \dots, M$.

- pour la discréétisation spatiale, une différence centrée faisant intervenir les valeurs connues u_{j+1}^n et u_{j-1}^n devrait être une bonne approximation :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \simeq \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (6.7)$$

L'approximation de l'équation aux dérivées partielles prend alors la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right] \simeq \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (6.8)$$

On a alors une équation aux différences finies. Comme toutes les valeurs discrètes au temps n sont supposées connues, il suffit de résoudre la relation pour l'inconnue U_j^{n+1} :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}c [U_{j+1}^n - U_{j-1}^n] \quad (6.9)$$

où c est *le nombre de Courant, ou nombre CFL* (Courant-Friedrich-Levy):

$$c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} = \frac{a}{\Delta x/\Delta t} \quad (6.10)$$

C'est le rapport de deux vitesses : la vitesse de propagation a et $\Delta x / \Delta t$ une vitesse de propagation numérique lié au maillage dans le domaine discret. Si nous cherchons les solutions obtenues pour des pas de temps allant de 0 à 4 avec un nombre de Courant de $c = 0.5$, avec les conditions initiales suivantes:

$$U_j^0 = 1, j < 5; U_j^0 = 0, j \geq 5 \quad (6.11)$$

on obtient :

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{23}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \frac{65}{64} & \frac{53}{64} & \frac{98}{64} & \frac{58}{64} & \frac{13}{64} & \frac{1}{64} & 0 & 6.5 \\ 4 & 1 & \frac{255}{256} & \frac{271}{256} & \frac{179}{256} & \frac{387}{256} & \frac{317}{256} & \frac{109}{256} & \frac{17}{256} & \frac{1}{256} & 0 & 7 \end{array} \right] \quad (6.12)$$

d'où la figure 2: La solution exacte à ce problème devrait montrer que les données

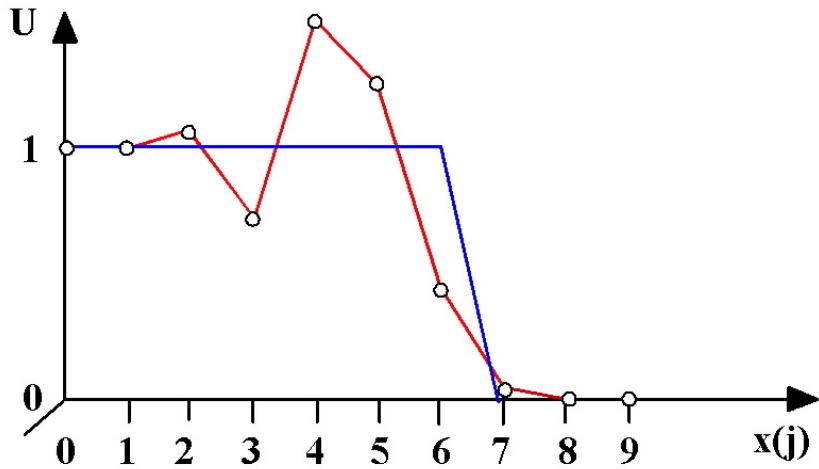


Figure 2 Schéma de discréétisation centrée

initiales sont transportées vers la droite de $\frac{1}{2}\Delta x$ à chaque pas de temps. On constate que cette solution développe une oscillation et si l'on continue elle diverge. L'analyse de la stabilité de ce schéma (von Neumann) montre effectivement que ce schéma centré en espace est inconditionnellement instable. Il y a cependant quelque chose de juste, puisque la somme des termes (colonne de droite) augmente de 0.5 à chaque itération. On rappelle que le critère CFL stipule que le domaine de dépendance numérique doit inclure le domaine de l'équation différentielle.

6.3 Schémas du premier ordre décentré

L'utilisation du schéma centré précédent n'a pas tenu compte de la physique. En effet pour le problème de convection donné, la vitesse a a un signe, celui de la propagation de l'information : soit dans le sens des x positif, soit dans le sens des x négatif. Reprenons le problème à zéro. Si la vitesse de propagation de l'onde a est positive, l'information quelle transporte se trouve en amont du point où l'on fait le calcul; en conséquence, il ne faut pas introduire à priori de point situé en aval puisque l'onde n'a pas encore atteint ce point.

6.3.1 Schéma CIR

Considérons donc maintenant comme choix de schéma de discréttisation pour la dérivée spatiale **un schéma décentré rétrograde** lorsque a est positif:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \simeq \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (6.13)$$

Dans ce cas la nouvelle équation discrète devient:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c [U_j^n - U_{j-1}^n] \quad (6.14)$$

Ce schéma appelé, le *schéma CIR (Courant-Isaacson-Reeves)*, est du premier ordre en espace et en temps. Il est stable conditionnellement et vérifie la condition *CFL*:

$$0 < c \leq 1 \quad (6.15)$$

Comme précédemment, si nous cherchons les solutions obtenues pour des pas de temps allant de 0 à 4 avec un nombre de Courant de $c = 0.5$, avec les conditions initiales :

$$U_j^0 = 1, j < 5; U_j^0 = 0, j \geq 5 \quad (6.16)$$

on obtient :

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 6.5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 7 \end{array} \right] \quad (6.17)$$

soit le graphe 3. Que constate-t-on ? Tout d'abord, la vitesse de déplacement de la discontinuité est correcte. Ensuite, si l'on augmente le nombre d'itération, il n'y a pas de divergence, enfin et surtout le choc est fortement atténué. Le schéma est donc dissipatif et suivant la valeur du nombre de Courant, l'amortissement au voisinage du choc sera d'autant plus important que c sera plus petit. En effet, son équation modifiée a la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{CIR} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \quad (6.18)$$

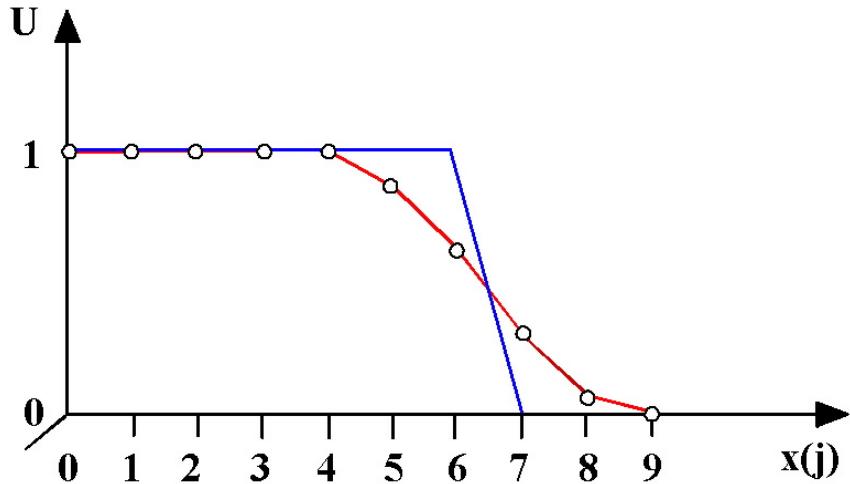


Figure 3 Schéma de discrétisation rétrograde

avec :

$$\nu_{CIR} = \frac{1}{2} \Delta x a (1 - c) \quad (6.19)$$

Il n'y pas d'oscillations. De même, si la vitesse a est négative, on aurait :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c [U_{j+1}^n - U_j^n] \quad (6.20)$$

Il sera stable si la condition précédente, mais avec $|c|$ est aussi vérifié. Un autre

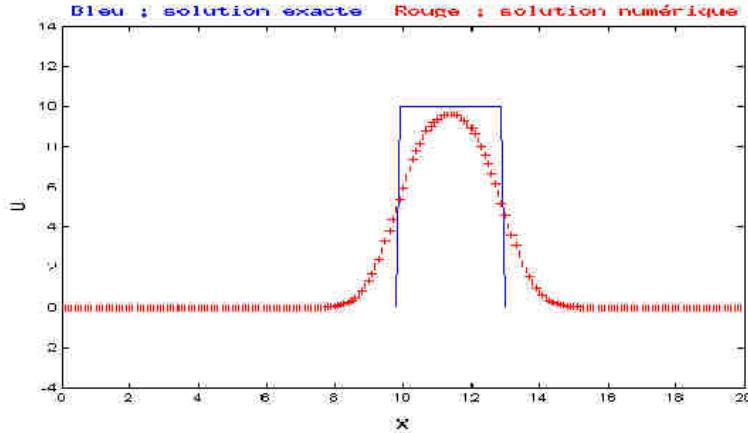


Figure 4 Schéma CIR

exemple est donnée, toujours avec un schéma CIR, en présence d'un saut (figure 4). La solution exacte est en bleu. La solution numérique en rouge.

6.3.2 Schéma CIR unifié

Mais que se passe-t-il lorsqu'on ne sait pas dans quelle direction s'effectue la propagation des ondes ? On doit effectuer une combinaison de ces deux schémas. Pour cela, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a^+ &= \max(a, 0) = \frac{1}{2} (a^+ + |a|) \Rightarrow c^+ = \frac{a^+ \Delta t}{\Delta x} \\ a^- &= \min(a, 0) = \frac{1}{2} (a^- - |a|) \Rightarrow c^- = \frac{a^- \Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6.21)$$

On vérifie que si $a > 0 \Rightarrow a^- = 0$ et que si $a < 0 \Rightarrow a^+ = 0$. On en déduit le nouveau schéma :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c^+ [U_j^n - U_{j-1}^n] - c^- [U_{j+1}^n - U_j^n] \quad (6.22)$$

avec la condition de stabilité :

$$0 \leq |c| \leq 1 \quad (6.23)$$

Par ailleurs son équation modifiée a la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{CIR} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \quad (6.24)$$

avec :

$$\nu_{CIR} = \frac{1}{2} \Delta x a (1 - |c|) \quad (6.25)$$

Ce schéma est dissipatif.

6.3.3 Schéma de Lax-Friedrich (L.F.)

Le schéma C.I.R. est du premier ordre en espace. Il est malgré tout possible d'obtenir un schéma stable à partir du schéma centré 6.9, qui pourtant est instable. En effet, si on modifie le schéma en remplaçant U_j^n par :

$$U_j^n \rightarrow \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) \quad (6.26)$$

on obtient le schéma de Lax-Friedrich :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{1}{2} c [U_{j+1}^n - U_{j-1}^n] \quad (6.27)$$

Si on effectue un calcul avec les mêmes conditions que pour les cas précédents, on aura :

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{15}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & \frac{63}{64} & \frac{63}{64} & \frac{54}{64} & \frac{54}{64} & \frac{16}{27} & \frac{27}{64} & 0 & 0 & 6.5 \\ 4 & 1 & \frac{255}{256} & \frac{255}{256} & \frac{243}{256} & \frac{243}{256} & \frac{189}{256} & \frac{189}{256} & \frac{81}{256} & \frac{81}{256} & 0 & 7 \end{array} \right] \quad (6.28)$$

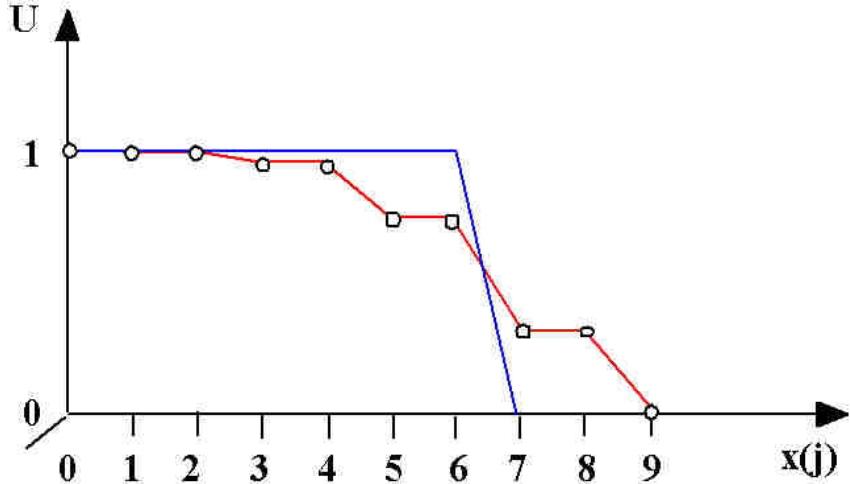


Figure 5 Schéma de Lax-Friedrich

soit la figure 5. On constate que le comportement global est correct, malgré une atténuation du signal au niveau de la discontinuité. C'est encore l'effet de la dissipation.

6.3.4 Généralisation à des systèmes d'équations linéaires

Considérons maintenant le système d'équations linéaires suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0; \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}) \quad (6.29)$$

où \mathcal{A} est une matrice constante $M \times M$. Si on utilise un schéma de discrétisation décentré en espace et en temps, on peut approximer 6.29 sous la forme :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) \quad (6.30)$$

Comme \mathbf{U}_j^{n+1} ne dépend que de \mathbf{U}_j^n et de \mathbf{U}_{j-1}^n , la condition *CFL* sera vérifiée si pour toutes les valeurs propres λ_p de \mathcal{A} on a :

$$0 \leq \frac{\Delta t \lambda_p}{\Delta x} \leq 1 \quad (6.31)$$

c'est à dire si toutes les valeurs propres λ_p sont positives. Dans ce cas, on utilise l'information, en provenance de la direction amont, c'est-à-dire de la direction d'où provient l'information. De même, si toutes les valeurs propres λ_p étaient négatives, on devrait choisir le schéma:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n) \quad (6.32)$$

Quant est-il, si les valeurs propres n'ont pas le même signe ? Ce peut être le cas avec les équations d'Euler monodimensionnelles instationnaires où les valeurs propres sont égales à u , $u + a$ et $u - a$ et en particulier dans le cas d'un écoulement subsonique où $|u| < a$; on aura alors des ondes se propageant dans les deux directions. On est alors amené à utiliser la méthode de décomposition associée au champ des caractéristiques ($\frac{dx}{dt} = \lambda_p$). Or, on a vu 5.35 que le système 6.29 pouvait être découplé en posant :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (6.33)$$

et s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathcal{D} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0; \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}) \quad (6.34)$$

où \mathcal{R}^{-1} est la matrice des vecteurs propres gauches de \mathcal{A} et \mathcal{D} la matrice diagonale associée avec :

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{R} \quad (6.35)$$

On est amené alors à résoudre M équations :

$$\frac{\partial w_p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial w_p}{\partial x} = 0; (p = 1, 2, \dots, M) \quad (6.36)$$

chacune avec sa propre méthode décentrée suivant le signe de λ_p . On définit alors :

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= \max(\lambda_p, 0); \mathcal{D}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_p^+, \dots, \lambda_M^+) \\ \lambda_p^- &= \min(\lambda_p, 0); \mathcal{D}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_p^-, \dots, \lambda_M^-) \end{aligned} \quad (6.37)$$

avec la propriété :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^- \quad (6.38)$$

Par suite la méthode décentrée pour le système 6.36 s'écrit :

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - \mathcal{D}^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{w}_j^n - \mathbf{w}_{j-1}^n) - \mathcal{D}^- \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{w}_{j+1}^n - \mathbf{w}_j^n) \quad (6.39)$$

Mais comme on peut revenir aux équations originales en multipliant l'équation 6.39 par \mathcal{R} , on obtient :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \mathcal{A}^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) - \mathcal{A}^- \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n) \quad (6.40)$$

avec :

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{R} \mathcal{D}^+ \mathcal{R}^{-1}; \mathcal{A}^- = \mathcal{R} \mathcal{D}^- \mathcal{R}^{-1} \quad (6.41)$$

et évidemment :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- \quad (6.42)$$

La formulation 6.40 est donc la généralisation pour des systèmes d'équations de la forme scalaire 6.22.

6.3.5 La dissipation : atténuation du signal

Reprenons le schéma *CIR* pour une équation scalaire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c [U_j^n - U_{j-1}^n] \quad (6.43)$$

avec $c > 0$. Son équation modifiée associée est :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{CIR} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \Delta x a (1 - c) \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \quad (6.44)$$

On constate que ce schéma est dissipatif, puisque l'équation modifiée qui est l'équation réellement calculée fait apparaître un terme du second ordre avec comme viscosité numérique $\nu_{CIR} = \frac{1}{2} \Delta x a (1 - c)$. Sa dissipation est d'autant plus importante que la nombre de courant est faible. Reprenons le schéma purement rétrograde du premier ordre 6.43. On peut le réécrire sous la forme suivante :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2} c [U_{j+1}^n - U_{j-1}^n] + \frac{1}{2} c [U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n] \quad (6.45)$$

Cette forme du schéma montre qu'il est *autodissipatif*, puisque sans rajouter aucun terme de dissipation dans la formulation 6.43, elle apparaît de manière naturelle avec le terme $\frac{1}{2} c [U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n]$. Mais on peut aussi constater que ce schéma peut être obtenu en prenant le schéma centré du début de cette étude, mais instable, auquel on a rajouté de la dissipation numérique soit $\frac{1}{2} c [U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n]$. De même, considérons le schéma de Lax-Friedrich:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - c [U_j^n - U_{j-1}^n] \quad (6.46)$$

ou :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2} c (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (6.47)$$

Son équation modifiée a la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{LF} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \quad (6.48)$$

avec :

$$\nu_{LF} = \frac{\Delta x a}{2c} (1 - c^2) \quad (6.49)$$

Ce schéma est aussi dissipatif. Si on le compare avec le schéma *CIR*, il est cependant beaucoup plus dissipatif; en effet, on a :

$$2 \leq \frac{\nu_{LF}}{\nu_{CIR}} = \frac{1 + c}{c} < \infty \quad (6.50)$$

La plupart des schémas linéaires précis au premier ordre atténue plus ou moins fortement la solution à cause de la présence de cette dissipation. Comme ces schémas ne présentent pas d'oscillation, justement à cause de la dissipation plus ou moins importante, il en découle une propriété importante : **ces schémas sont monotones** (figure 6).

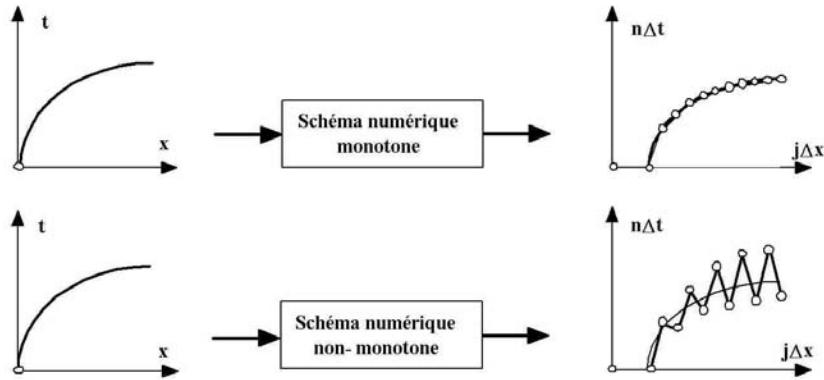


Figure 6 La monotonicité

6.3.6 La monotonicité

Définition

Pour définir la notion de monotonicité, il suffit de savoir que, dans le cas de l'équation d'onde, la solution exacte au temps $t + \Delta t$, ne faisant que translater les conditions initiales, si les données initiales $u(x, t = 0)$ sont représentées par des fonctions monotones (croissantes ou décroissantes), alors il en sera de même pour la solution $u(x, t + \Delta t)$. Or, en général, un schéma numérique ne conduit pas à la solution exacte, mais quelque soit le niveau de l'approximation, il devrait transformer les fonctions initiales en solutions elle-même monotones.

Schémas monotones

Les schémas linéaires de la forme 6.43 font partie d'une classe de schémas plus large et définie par :

$$U_j^{n+1} = H [U_{j-l}^n, \dots, U_{j+m}^n] = \sum_{k=-l}^m b_k U_{j+k}^n \quad (6.51)$$

où l et m sont des entiers positifs. On dira qu'un schéma de la forme 6.51 est monotone si tous ces coefficients b_k sont positifs ou nuls. Ceci découle du théorème suivant:

Le théorème de Godunov

Un schéma de la forme 6.51 préserve la monotonie si et seulement si aucun de ces coefficients b_k n'est négatif. On a :

$$\frac{\partial H}{\partial U_j^n} \geq 0, \forall j \quad (6.52)$$

Démonstration

Considérons un gradient de la solution 6.51 sous la forme suivante :

$$U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} = \sum_{k=-l}^m b_k U_{j+k+1}^n - \sum_{k=-l}^m b_k U_{j+k}^n = \sum_{k=-l}^m b_k [U_{j+k+1}^n - U_{j+k}^n] \quad (6.53)$$

Si les données sont monotones, chacun des gradients du terme de droite ont le même signe, et si tous les b_k sont positifs, les gradients $U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}$ auront aussi le même signe. Par conséquent, la condition suffisante pour que la monotonie soit préservée est que les coefficients de 6.51 soient tous positifs. Supposons, maintenant que l'un des coefficients soit négatifs, par exemple b_k . Prenons le cas simple où :

$$U_j^0 = 1, j \leq 0, U_j^0 = 0, j < 0 \quad (6.54)$$

Toutes ces données sont monotones, avec des gradients nuls, excepté pour $U_1^0 - U_0^0$ qui est négatif. Dans la solution, il y a un gradient $U_{j+1}^0 - U_j^0$ avec $j = -k$, égal à :

$$U_{-k+1}^{n+1} - U_{-k}^{n+1} = \sum_{k=-l}^m b_k [U_{j+k+1}^0 - U_{j+k}^0] = b_k [U_1^0 - U_0^0] \quad (6.55)$$

qui est positif. Par suite, les coefficients b_k positifs sont aussi nécessaires pour garantir la monotonie.

6.4 Schémas linéaires du second ordre et plus

Une approximation au premier ordre d'un schéma numérique permet d'obtenir rapidement des résultats (les schémas ne sont pas très complexes), mais en général avec des amortissement plus ou moins important au voisinage de discontinuité ou avec des difficultés dans les zones soniques par exemple. Dans la pratique, et en particulier dans le milieu industriel, on demande au moins une précision d'ordre deux en espace pour les problèmes stationnaires et de plus d'ordre deux en temps pour les problèmes instationnaires.

6.4.1 Construction de schémas linéaires de précision donnée

Il est possible de construire des schémas linéaires ayant la forme 6.51 et qui soit du second ordre ou plus. Pour le montrer, considérons l'expression :

$$U_j^{n+1} - \sum_{k=-l}^m b_k U_{j+k}^n \quad (6.56)$$

où l'on remplace U_j^n par u_j^n :

$$u_j^{n+1} - \sum_{k=-l}^m b_k u_{j+k}^n \quad (6.57)$$

Cette différence représente l'erreur locale ε du schéma, on a donc :

$$\varepsilon = u_j^{n+1} - \sum_{k=-l}^m b_k u_{j+k}^n \quad (6.58)$$

Pour l'équation de convection scalaire, l'erreur de troncature pour un schéma quelconque s'écrit :

$$\varepsilon = \sum_j \frac{(\Delta t)^j}{j!} \left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right) - \sum_j \sum_k b_k \frac{(k \Delta x)^j}{j!} \left(\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right) \quad (6.59)$$

Or, par induction, à partir de l'équation de convection, on a :

$$\left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right) = (-a)^j \left(\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right) \quad (6.60)$$

Par suite, les termes contenant une valeur particulière de j dans l'expression de ε sont :

$$\frac{(\Delta t)^j}{j!} \left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right) - \sum_k b_k \frac{(k \Delta x)^j}{j!} \left(\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right) \quad (6.61)$$

Par conséquent, pour obtenir un schéma précis à l'ordre $m = j$, ces termes doivent disparaître et l'on a les conditions suivantes, dites *conditions de consistances* :

$$\sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k k^j = (-c)^j, \quad 0 \leq j \leq m \quad (6.62)$$

6.4.2 Le schéma de Lax-Wendroff

Considérons maintenant une généralisation de 6.22 sous la forme suivante :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - b_1 a \Delta t \left[\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \right] - b_2 a \Delta t \left[\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} \right] \quad (6.63)$$

Si on pose :

$$b_1 = \frac{1}{2}(1+c), \quad b_2 = \frac{1}{2}(1-c) \quad (6.64)$$

on obtient après arrangement le schéma appelé **schéma de Lax-Wendroff** :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}c(1+c)U_{j-1}^n + (1-c^2)U_j^n - \frac{1}{2}c(1-c)U_{j+1}^n \quad (6.65)$$

ou :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}c(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{c^2}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (6.66)$$

Si on compare 6.65 avec 6.51, on a :

$$b_{-1} = \frac{1}{2}c(1+c), \quad b_0 = (1-c^2), \quad b_{+1} = -\frac{1}{2}c(1-c) \quad (6.67)$$

Or, d'après 6.62 avec 6.67:

$$\sum_{k=-1}^1 b_k k^0 = 1 = (-c)^0 \quad (6.68)$$

$$\sum_{k=-1}^1 b_k k^1 = -c = (-c)^1 \quad (6.69)$$

$$\sum_{k=-1}^1 b_k k^2 = c^2 = (-c)^2 \quad (6.70)$$

$$\sum_{k=-1}^1 b_k k^3 = -c \neq (-c)^3 \quad (6.71)$$

Le schéma de Lax-Wendroff est donc du second ordre en espace et en temps. Par ailleurs, son équation modifiée a la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{LW} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x^3} \quad (6.72)$$

avec :

$$\nu_{LW} = -a \frac{(\Delta x)^2}{6} (1 - c^2) \quad (6.73)$$

Ce schéma est donc *dispersif*. Une question maintenant se pose, d'après l'étude effectuée sur les schémas du premier ordre : ceux-ci sont en général dissipatif et monotone. Or, la propriété de monotonicité est une propriété que l'on aimerait garantir pour les schémas d'ordre supérieur. Car, en effet, un schéma non monotone sera un schéma qui pourra générer des oscillations dans la solution. Est-il possible d'obtenir des schémas d'ordre supérieur qui soit monotone ? On n'oublie pas cependant, que pour l'instant ne sont envisagés que des schémas linéaires. Le théorème suivant va répondre à cette question.

6.4.3 Le théorème de Godunov pour les schémas linéaires d'ordre ≥ 2

Il n'y a pas de schéma linéaire et monotone de la forme

$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-l}^m b_k U_{j+k}^n \quad (6.74)$$

ayant une précision du second ordre ou supérieur. En effet, reprenons le cas du schéma de Lax-Wendroff qui est du second ordre en espace et en temps. On se rappelle que pour préserver la monotonicité, les coefficients b_k doivent être positifs ou nuls. Or, les coefficients de ce schéma (voir 6.67) ne sont pas tous positifs ou nuls : par conséquent ce schéma n'est pas monotone. En effet, posons :

$$S_j = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k k^j \quad (6.75)$$

On a en supposant que les b_k sont positif et en posant $b_k = d_k^2$:

$$S_0 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} d_k^2 = 1 \quad (6.76)$$

$$S_1 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} k d_k^2 = -c \quad (6.77)$$

$$S_2 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} k^2 d_k^2 = c^2 \quad (6.78)$$

Or, avec 6.75:

$$S_2 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k k^2 \quad (6.79)$$

on peut écrire :

$$S_2 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k (k + c)^2 - 2c \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k k - c^2 \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k \quad (6.80)$$

soit :

$$S_2 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k (k + c)^2 - 2c S_1 - c^2 S_0 \quad (6.81)$$

et avec 6.76 et 6.77 :

$$S_2 = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k (k + c)^2 + c^2 \leq c^2 \quad (6.82)$$

Or cette relation a été obtenue en supposant que $b_k \geq 0$. *On en conclut qu'un schéma linéaire du second ordre à coefficient positif est impossible.* En conséquence, on est obligé de se résigner au fait que les schémas linéaires du second ordre (ou supérieur) *ne sont pas monotones* : ce qui signifie qu'ils sont générateurs d'oscillations. Ce résultat est la raison fondamentale pour laquelle les problèmes hyperboliques sont numériquement plus difficiles à résoudre que les problèmes elliptiques ou paraboliques. Si l'on reprend les mêmes données initiales que pour le schéma centré et le schéma CIR, on obtient pour le schéma de Lax-Wendroff :

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.125 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.109 & 0.468 & 0.047 & 0 & 0 & 0 & 5.624 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0.986 & 1.148 & 0.762 & 0.211 & 0.018 & 0 & 0 & 6.125 \\ 4 & 1 & 1 & 1.002 & 0.971 & 1.135 & 0.975 & 0.418 & 0.093 & 0.0067 & 0 & 6.6 \end{array} \right]$$

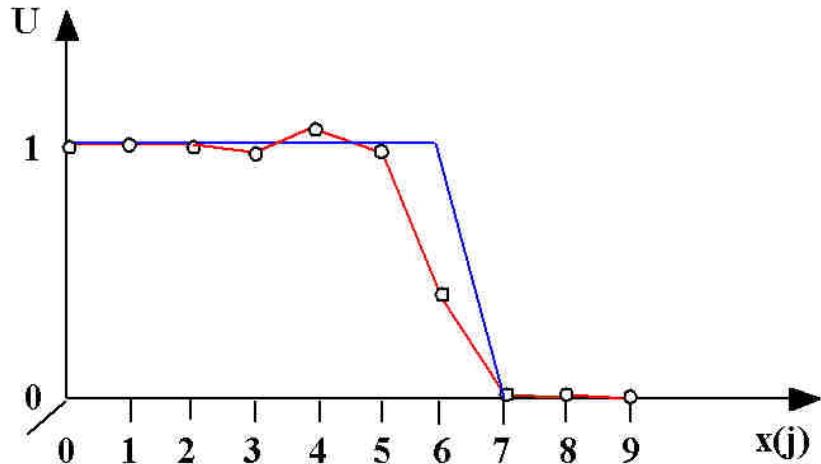


Figure 7 Schéma de Lax-Wendroff

soit la figure 7. On vérifie que le schéma est légèrement dispersif (décalage de la solution numérique par rapport à la solution exacte). On voit aussi apparaître une oscillation à l'amont de la discontinuité. Si on continue à itérer, cette oscillation sera toujours présente mais ne s'amplifiera pas. Un autre exemple avec un saut fait clairement apparaître les oscillations en amont des discontinuités (figure 8).

6.4.4 Les solutions parasites des schémas d'ordre supérieur

Un autre problème avec les schémas linéaires d'ordre supérieur est qu'ils admettent des solutions parasites. Par exemple, considérons de nouveau le schéma de Lax-Wendroff (d'ordre 2 en espace et en temps) sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{1}{2}c(1+c)U_{j-1}^n - c^2U_j^n - \frac{1}{2}c(1-c)U_{j+1}^n \quad (6.83)$$

On a une solution stationnaire indépendante de n si U satisfait la relation de récurrence :

$$\frac{1}{2}c(1+c)U_{j-1} - c^2U_j - \frac{1}{2}c(1-c)U_{j+1} = 0 \quad (6.84)$$

Les solutions pour cette relation sont de la forme :

$$U_k = r^k \quad (6.85)$$

qui satisfait 6.83 si :

$$\frac{1}{2}c(1+c) - c^2r - \frac{1}{2}c(1-c)r^2 = 0 \quad (6.86)$$

On peut réécrire cette relation sous forme factorisée :

$$\frac{c}{2}(1-r)[(1+c) + (1-c)r] = 0 \quad (6.87)$$

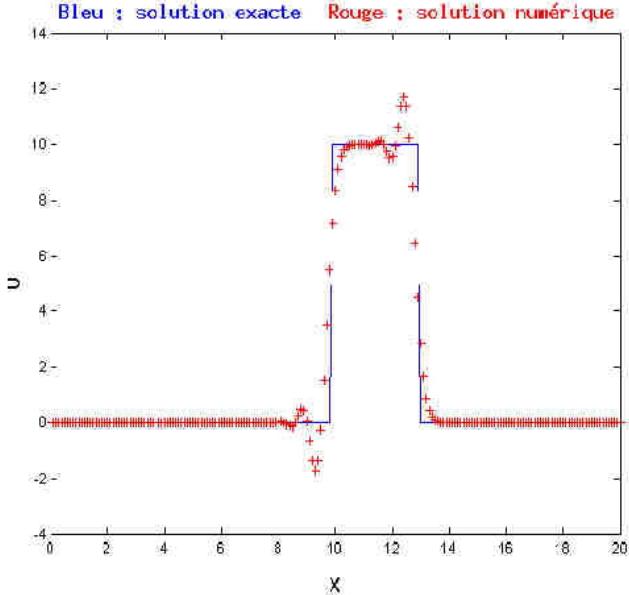


Figure 8 Schéma de Lax-Wendroff

Maintenant, la seule solution stationnaire est $U = Cte$; c'est le cas pour $r = 1$. La seconde solution de 6.86 est :

$$r = -\frac{1+c}{1-c} \quad (6.88)$$

qui correspond à une solution oscillante qui s'amplifie dans la direction de l'écoulement (sens des j positif) :

$$U_k = r^k = (-1)^k \left[\frac{1+c}{1-c} \right]^k \quad (6.89)$$

L'expérience montre que ces oscillations peuvent apparaître et par suite il faudra trouver un moyen de les éliminer.

6.4.5 Quelques autres schémas classiques

Schéma de Warming et Beam

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}c(c-1)u_{j-2}^n + c(2-c)u_{j-1}^n + \frac{1}{2}(c-1)(c-2)u_j^n \quad (6.90)$$

basé sur la formulation :

$$u_j^{n+1} = b_{-2}u_{j-2}^n + b_{-1}u_{j-1}^n + b_0u_{j+1}^n \quad (6.91)$$

ou :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}c(c-1)(U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) \quad (6.92)$$

Son équation modifiée a la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + a \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu_{BW} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x^3} \quad (6.93)$$

avec :

$$\nu_{BW} = a \frac{(\Delta x)^2}{6} (1 - c)(2 - c) \quad (6.94)$$

et vérifiant la condition CFL :

$$1 \leq c \leq 2 \quad (6.95)$$

Ce schéma est dispersif. Avec les même conditions initiales que les autre cas traités, on a:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{43}{64} & \frac{19}{64} & -\frac{11}{64} & \frac{2}{64} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{449}{512} & \frac{251}{512} & \frac{38}{512} & -\frac{79}{512} & \frac{33}{512} & -\frac{2}{512} \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3907}{4096} & \frac{2895}{4096} & \frac{11717}{4096} & -\frac{260}{4096} & \frac{413}{4096} & \frac{271}{4096} \end{array} \right] \quad (6.96)$$

On obtient la figure 9. On remarquera que contrairement au schéma de Lax-Wendroff,

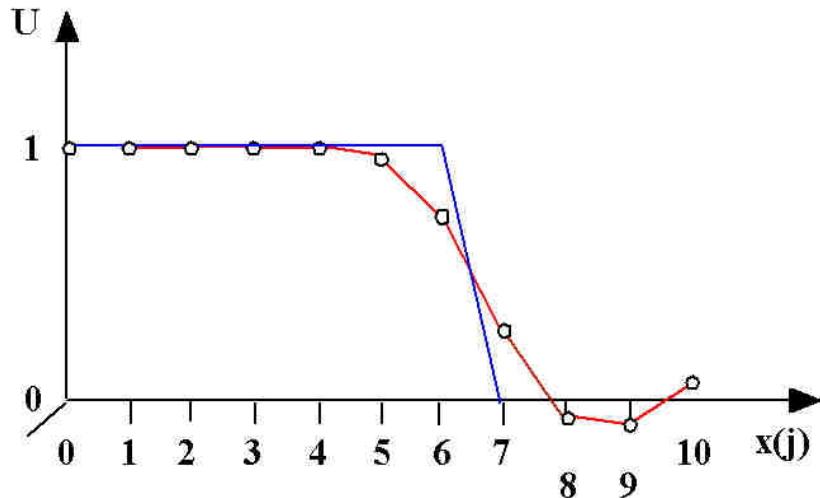


Figure 9 Schéma de Beam et Warming

l'oscillation apparaît après la discontinuité. La raison provient du signe de la dispersion. En présence d'un saut on a la figure ??:

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel dans une tuyère et en présence d'un choc on obtient la figure 11:

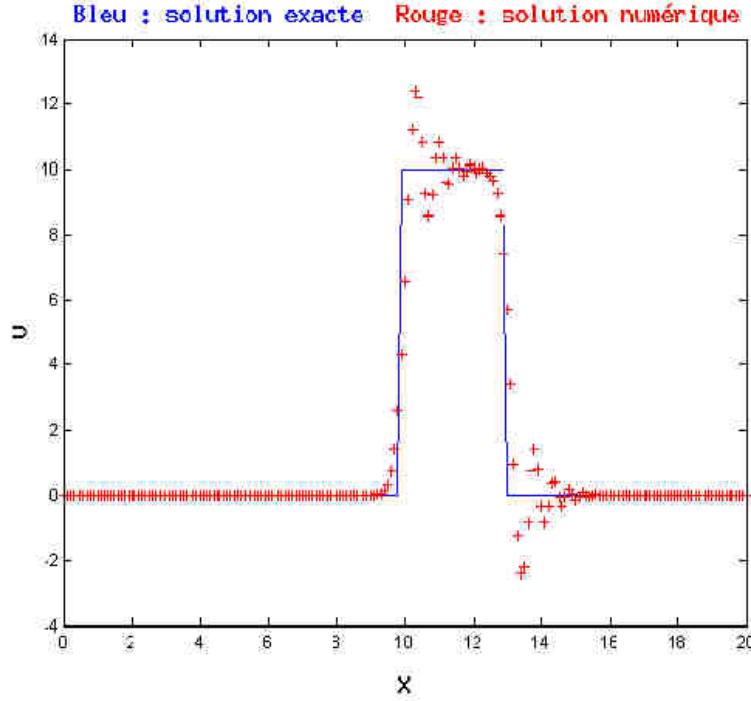


Figure 10 Schéma de Beam-Warming sans dissipation

Famille des schémas-q

Les schémas *L.F.*, *C.I.R.* et *L.W.* appartiennent à la famille des *schéma-q* :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}c(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{q}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (6.97)$$

avec, en particulier :

$$q = \begin{cases} 1, & \text{L.F.} \\ |c|, & \text{C.I.R.} \\ c^2, & \text{L.W.} \end{cases} \quad (6.98)$$

Une étude de stabilité conduit au facteur d'amplification $G(\phi, c, q)$ suivant :

$$G(\phi, c, q) = 1 - q(1 - \cos \phi) - ic \sin \phi \quad (6.99)$$

avec :

$$|G(\phi, c, q)| = \left[1 - 4 \left\{ q - c^2 - (q^2 - c^2) \sin^2 \frac{\phi}{2} \right\} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]^{1/2} \quad (6.100)$$

En choisissant ϕ petit on constate que $q - c^2$ ne doit pas être négatif si l'on veut que le facteur d'amplification $|G(\phi, c, q)|$ soit inférieur à 1. On doit alors vérifier la

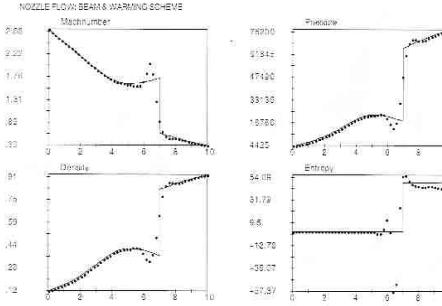


Figure 11 Schéma de Beam&Warming

condition :

$$c^2 \leq q \leq 1 \quad (6.101)$$

On a pour ϕ petit :

$$|G(\phi, c, q)| = 1 - \frac{1}{2} (q - c^2) \phi^2 \quad (6.102)$$

et pour le déphasage Φ :

$$\frac{\Phi}{\Phi_{conv.}} = 1 - \frac{1}{6} (1 + 2c^2 - 3q) \phi^2 \quad (6.103)$$

6.4.6 Résumé

A ce stade de l'étude, qu'avons nous ? Nous avons étudié deux types de schémas: les schémas **linéaires du premier ordre** et les schémas **linéaires du second ordre**. Nous avons vu que les schémas **linéaires** du premier ordre avaient trois caractéristiques essentielles: *leur faible précision, leur forte dissipation au voisinage de discontinuité et enfin leur monotonie*. Les schémas **linéaires** du second ordre (ou plus) ont évidemment *une meilleure précision mais génèrent des oscillations au voisinage de discontinuité et par conséquent sont non-monotones*. Jusqu'à présent, nous n'avons traité que de problèmes avec des équations linéaires. Que se passe-t-il si l'on passe à un problème non linéaire, ce qui sera le cas lors de la résolution des équations d'Euler ?

6.5 Problèmes non linéaires

6.5.1 Formulation non conservative et discontinuités

On écrit l'équation de Burgers non-visqueuse (cas limite non-linéaire des équations d'Euler (quantité de mouvement) monodimensionnelles instationnaires) sous la forme

suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.104)$$

on peut choisir le schéma suivant avec $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (6.105)$$

si on suppose que $\lambda = 0.5$, on obtient avec les conditions initiales classiques d'un saut:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \quad (6.106)$$

Cette méthode convergera pour des solutions régulières, mais ne convergera pas en présence de discontinuités si le maillage est raffiné. En effet, si l'on a :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, \text{ pour } j < 0 \\ 1, \text{ pour } j \geq 0 \end{cases} \quad (6.107)$$

pour laquelle la solution de l'équation de Burgers est :

$$u(x, t) = u_0(x - t/2) \quad (6.108)$$

les données discrètes correspondantes sont :

$$U_j^0 = \begin{cases} 0, \text{ pour } j < 0 \\ 1, \text{ pour } j \geq 0 \end{cases} \quad (6.109)$$

On peut alors vérifier que $U_j^1 = U_j^0$ pour tout j et de même $U_j^n = U_j^0$ et par suite la solution converge vers $u(x, t) = u_0(x)$. Dans cette exemple, la solution est évidemment fausse; mais des comportements similaires peuvent apparaître avec d'autres données initiales qui peuvent donner des solutions qui paraissent correctes mais qui sont fausses. La figure 12 montre la solution exacte et la solution calculée au temps $t = 1$ avec des données suivantes $U_L = 1.2$ et $U_R = 0.5$.

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 8.5 \\ 1 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 0.675 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 8.675 \\ 2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 0.852 & 0.544 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 8.9 \\ 3 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.000 & 0.628 & 0.511 & 0.5 & 0.5 & 9.14 \\ 4 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.2 & 1.1 & 0.745 & 0.54 & 0.497 & 0.5 & 9.38 \end{array} \right] \quad (6.110)$$

On obtient un résultat admissible mais avec une vitesse de propagation totalement fausse.

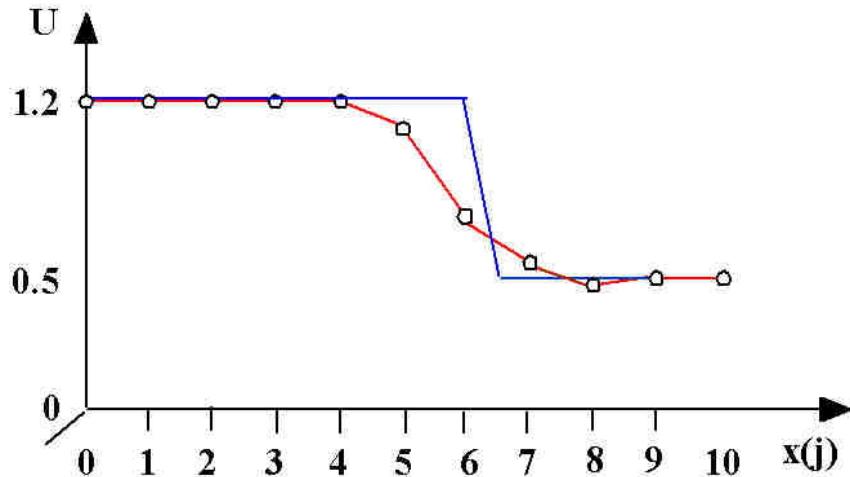


Figure 12 Problème non linéaire

Conclusion

Manifestement, pour ce schéma de discrétisation simple appliquée à l'équation de Burgers non linéaire, on constate que la capture d'un choc n'est pas correcte. Ou bien la solution est complètement fausse, ou bien elle paraît correcte mais avec une vitesse de propagation fausse. On peut se poser alors la question de savoir si avant toute chose, il ne serait pas important d'introduire dès le départ de l'étude une technique de discrétisation permettant de capter automatiquement le choc. Par ailleurs, nous avons constaté que les schémas linéaires avaient des difficultés pour capter les chocs. Aussi allons-nous d'une certaine manière de nouveau repartir de zéro. Tout d'abord, nous allons rechercher une formulation discrète permettant de garantir la capture des chocs. Comme par ailleurs la monotonie est une propriété importante garantissant que des oscillations n'apparaissent pas, nous partirons d'un schéma du premier ordre. Nous chercherons ensuite à augmenter la précision de notre schéma. Ce n'est qu'ensuite que l'on cherchera à garantir la monotonie ainsi que la précision.

6.6 Formulation conservative

6.6.1 Quand deux caractéristiques se rencontrent

Considérons une équation aux dérivées partielles non linéaire *sous forme conservative* pour une fonction scalaire $f(u)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (6.111)$$

avec la condition initiale suivante :

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (6.112)$$

Dans la suite, on supposera que la fonction $f(u)$ est convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété :

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} > 0 \quad (6.113)$$

A titre d'exemple, considérons l'équation de Burgers pour laquelle :

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (6.114)$$

Soit a la vitesse de l'onde définie par :

$$a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \quad (6.115)$$

La convexité implique que :

$$\frac{\partial a(u)}{\partial u} > 0 \quad (6.116)$$

En supposant que $u(x, t)$ soit différentiable, l'équation 6.111 peut être écrite sous sa forme quasi linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.117)$$

Considérons maintenant les solutions $x(t)$ de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = a(u(x(t), t)) \quad (6.118)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (6.119)$$

En différentiant $u(x(t), t)$ par rapport à t , on peut voir que :

$$u(x(t), t) = u(x - at, 0) = \phi(x_o - at) \quad (6.120)$$

est une solution de 6.111. La fonction $x(t)$ est une caractéristique. Que devient u le long de cette courbe ? Pour cela calculons la dérivée totale de u :

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u(x(t), t)) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.121)$$

Or, d'après 6.117 le membre de droite est nul. Par suite la dérivée totale de u le long de la courbe est nulle : par conséquent u est constant le long des caractéristiques. Comment évolue la vitesse a de l'équation de Burgers le long d'une caractéristique ? On a :

$$\frac{dx}{dt} = a(u(x(t), t)) = a(u(x_o, 0)) \quad (6.122)$$

ou :

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x_o) \quad (6.123)$$

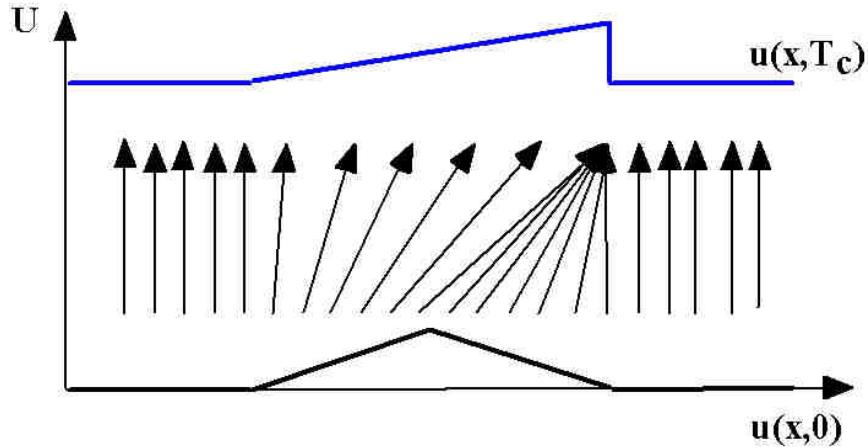


Figure 13 Choc

puisque sur la caractéristique, on a :

$$u(x, t) = u(x_o, 0) \quad (6.124)$$

Par conséquent, pour l'équation de Burgers, les caractéristiques sont des droites de pente $\phi(x_o)$. La différence entre les cas linéaires et non linéaires est que les pentes des caractéristiques ne sont pas nécessairement constantes dans le second cas. Par suite, lorsque on voit évoluer ces caractéristiques au cours du temps, elles peuvent se rencontrer (figure 13). Ainsi, si on a $\phi(x_1) > \phi(x_2)$ pour $x_1 > x_2$, alors les deux caractéristiques se rencontreront pour un temps fini. Même si les conditions initiales sont régulières, il existe alors un temps critique T_c pour lequel la solution n'est plus unique. La solution est-elle celle provenant de la caractéristique 1 ou de la caractéristique 2 ou des deux? Pour le savoir, considérons le comportement spatial de u . On connaît la solution exacte pour tout temps t :

$$u(x, t) = \phi(x - a(u(x(t), t))t) \quad (6.125)$$

La dérivée partielle de u par rapport à x donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi' - t \frac{\partial a(u(x(t), t))}{\partial x} \phi' \quad (6.126)$$

ou :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi' - t \frac{da}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \phi' \quad (6.127)$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\phi'}{1 + t \frac{da}{du} \phi'} \quad (6.128)$$

Si ϕ' est négatif, alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ diverge, car le dénominateur tend vers zéro au temps T_c où:

$$T_c = -\frac{1}{\frac{da}{du}\phi'} \quad (6.129)$$

On pourrait alors penser que la solution ne peut continuer après le temps T_c . Cependant, d'un point de vue physique, on sait qu'il existe des solutions pour des équations hyperboliques non linéaires après le temps critique. Pour connaître la manière dont évolue cette solution, il est nécessaire d'introduire le **concept de solution faible**.

6.6.2 Le concept de solution faible

Définition

Il n'est pas toujours possible de définir une solution classique d'une équation ou d'un système hyperbolique, c'est-à-dire une solution qui soit définie et continue pour tout t . Dans le cas de problèmes où les solutions des équations peuvent être discontinues, on définit une classe de solutions plus étendue que celle des solutions classiques, ce sont les *solutions faibles* d'un système hyperbolique, solutions qui admettent des discontinuités. De telles solutions existent pour des équations instationnaires de la dynamique des gaz si l'on considère le cas d'écoulements avec ondes de choc. On sait que dans un écoulement supersonique on peut rencontrer des chocs, c'est-à-dire des lignes ou surfaces à la traversée desquelles les grandeurs caractérisant l'écoulement sont discontinues. Les valeurs des grandeurs physiques de part et d'autre de la discontinuité sont reliées par les équations du choc ou équations de conservation de Rankine-Hugoniot. On définit pour ce problème une *classe de solutions faibles*, c'est-à-dire de solutions qui vérifient les équations de Rankine-Hugoniot.

Démonstration

Considérons un système hyperbolique sous forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (6.130)$$

Ce système représente par exemple les équations d'Euler (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie). Introduisons le vecteur :

$$\tilde{\mathbf{v}} = u\tilde{\mathbf{t}} + f\tilde{\mathbf{x}} \quad (6.131)$$

On a :

$$\int \int_D \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_C \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} ds \quad (6.132)$$

mais :

$$\int_C \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} ds = \int_C [\mathbf{u} dx - \mathbf{f} dt] \quad (6.133)$$

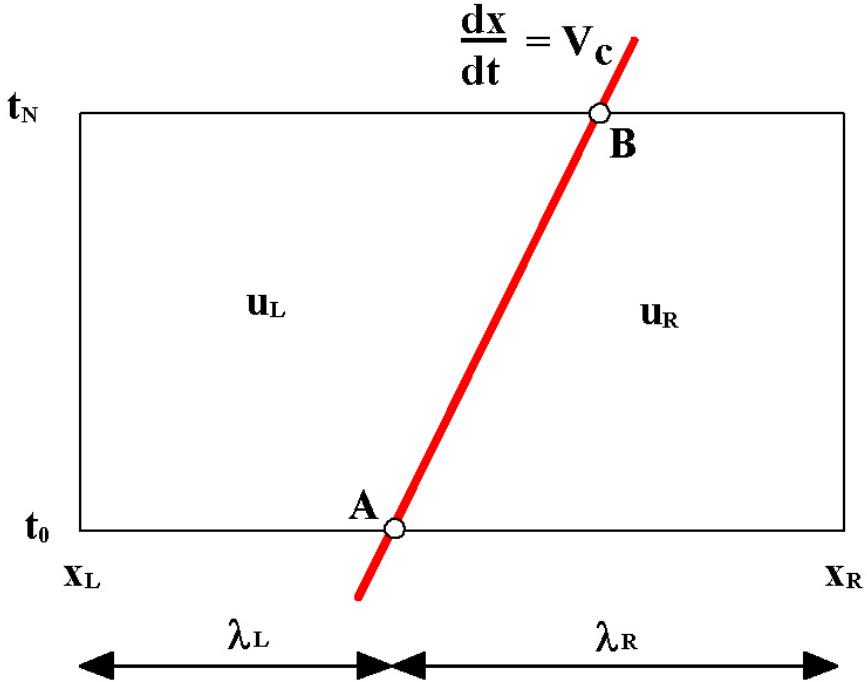


Figure 14 Choc et volume de contrôle

Ainsi donc, pour le volume de contrôle $[x_L, x_R] \times [t_0, t_N]$ une formulation intégrale des équations de conservations s'écrit:

$$\oint_C [\mathbf{u} dx - \mathbf{f} dt] = 0$$

Soit alors AB un arc de courbe le long duquel $\mathbf{u}(x, t)$ est discontinue (figure 14) et notons par \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R les valeurs de \mathbf{u} de part et d'autre de AB . De même introduisons \mathbf{f}_L et \mathbf{f}_R . On peut écrire :

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, t^N) dx - \int_{x_R}^{x_L} \mathbf{u}(x, t^0) dx + \int_{t^0}^{t^N} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_R, t)) dt + \int_{t^N}^{t^0} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_L, t)) dt = 0 \quad (6.134)$$

Soit :

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, t^N) dx = \int_{x_R}^{x_L} \mathbf{u}(x, t^0) dx + \int_{t^0}^{t^N} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_L, t)) dt - \int_{t^0}^{t^N} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_R, t)) dt \quad (6.135)$$

Calculons tout d'abord $\int_{x_L}^{x_R} (\mathbf{u}(x, t^N) - \mathbf{u}(x, t^0)) dx$:

$$\mathbf{u}_R (\lambda_R - V_c (t^N - t^0)) + \mathbf{u}_L (\lambda_L + V_c (t^N - t^0)) - (\mathbf{u}_L \lambda_L + \mathbf{u}_R \lambda_R) \quad (6.136)$$

ou :

$$\int_{x_L}^{x_R} (\mathbf{u}(x, t^N) - \mathbf{u}(x, t^0)) dx = (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) V_c (t^N - t^0) \quad (6.137)$$

puis :

$$\int_{t^0}^{t^N} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_L, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_R, t))) dt = (\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)) (t^N - t^0) \quad (6.138)$$

Soit finalement :

$$(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) V_c (t^N - t^0) = (\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)) (t^N - t^0) \quad (6.139)$$

Posons :

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R; [\mathbf{f}(\mathbf{u})] = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) \quad (6.140)$$

Ainsi si $\mathbf{u}(x, t)$ est discontinue sur un arc de courbe, une solution faible satisfait alors les conditions de saut :

$$V_c [\mathbf{u}] = [\mathbf{f}(\mathbf{u})] \quad (6.141)$$

soit :

$$V_c = \frac{[\mathbf{f}(\mathbf{u})]}{[\mathbf{u}]} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)}{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R} \quad (6.142)$$

où $V_c = \frac{dx}{dt}$ est la vitesse de propagation du choc. Cette relation est la relation de Rankine-Hugoniot. Si \mathbf{f} est une fonction régulière, on a :

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)}{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\xi} \quad (6.143)$$

où ξ est une valeur intermédiaire entre \mathbf{u}_R et \mathbf{u}_L . Ainsi, lorsque $\mathbf{u}_L \rightarrow \mathbf{u}_R$, alors :

$$V_c \rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\frac{\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R}{2}} = a \left(\frac{\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R}{2} \right) \quad (6.144)$$

Cela signifie que les ondes se propage le long des caractéristiques.

Conclusion

La conclusion de ces résultats est clair. La solution faible permet de capter automatiquement les chocs dans le cas d'une formulation obtenue à partir des équations de conservations de la dynamique des gaz, puisque on vérifie les relations de Rankine-Hugoniot. On pourrait en conclure qu'il suffit pour un problème donné, en présence de discontinuités d'introduire une formulation conservative. Ce n'est cependant pas si simple.

6.6.3 La formulation conservative mathématique ou physique

Le problème est de savoir si l'on parle de conservation au sens purement mathématique ou si l'on parle de conservation mathématique ayant un sens physique. Pour le montrer, considérons les équations d'un écoulement isotherme de la dynamique des gaz. Sous forme conservative, *issues des principes physiques de conservation*, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 \rho \end{bmatrix} = 0 \quad (6.145)$$

où a , la vitesse du son est constante. Ces équations peuvent être réécrite sous la forme suivante où interviennent les variables primitives:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.146)$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (6.147)$$

On peut alors reconstruire un nouveau système conservatif en écrivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \frac{1}{2} u^2 + a^2 \ln \rho \end{bmatrix} = 0 \quad (6.148)$$

Mathématiquement, on a bien une formulation conservative, cependant ces dernières équations 6.148 n'ont pas de sens physique, car elles expriment la conservation de la masse et de la vitesse ! On en déduit que *la formulation conservative doit faire intervenir les variables conservatives issues de la formulation mathématique des principes de conservation physique*.

6.6.4 Non-unicité de la solution

Quand bien même, la formulation conservative serait correcte, un autre problème se présente : la solution faible n'est pas unique ! En d'autres termes, pour les mêmes conditions initiales, on peut obtenir plusieurs solutions faibles. Ceci est immédiat si on se réfère à la solution pour la vitesse du choc, c'est-à-dire à la relation de Rankine-Hugoniot. En effet, on peut écrire :

$$V_c = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \quad (6.149)$$

Quelle est la bonne solution ? Il est clair alors qu'il faudra choisir la solution physique. Pour cela, on introduit la condition d'entropie.

6.6.5 La condition d'entropie

D'après l'analyse précédente, comment alors déterminer, ou plutôt choisir la bonne solution ? La réponse à cette question est d'imposer que la bonne solution faible soit

la limite de solutions associés à la formulation visqueuse (problème physique réel) du problème lorsque l'on fait tendre la viscosité vers zéro. Soit u^ν la solution de :

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial t} + \frac{\partial f(u^\nu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial x^2} \quad (6.150)$$

où ν est la viscosité. On impose alors que :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} u^\nu = u \quad (6.151)$$

La solution faible qui vérifie cette condition conduit alors à une problème bien posé. La solution existe et elle est unique. On dit alors que les solutions qui satisfont cette condition vérifient la condition d'entropie. En fait, on sait que physiquement, **l'entropie ne peut qu'augmenter à travers un choc**, et la condition 6.150 est l'un des mécanismes permettant d'identifier la solution physique ayant cette propriété. Il existe un critère équivalent que l'on peut utiliser pour choisir la bonne solution et qui est plus pratique à mettre en place. Rappelons que la vitesse V_c de la discontinuité est donnée par :

$$V_c = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} \quad (6.152)$$

et considérons le cas de l'équation de Burgers, avec la condition :

$$u_L > u_R \quad (6.153)$$

Or, puisque f est une fonction convexe, c'est-à-dire puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0$, alors $\frac{da}{du} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0$ et avec $u_L > u_R$ on a :

$$a(u_L) > a(u_R) \quad (6.154)$$

et comme :

$$V_c = \frac{a(u_L) + a(u_R)}{2} \quad (6.155)$$

la condition d'entropie est vérifiée si :

$$a(u_L) > V_c > a(u_R) \quad (6.156)$$

Les pentes des caractéristiques à gauche (indice L) sont plus grandes que celles à droite (indice R) et par conséquent les caractéristiques s'entrecroisent au niveau du choc. On a bien une onde de compression. Par contre, si on prenait comme condition :

$$u_L < u_R \quad (6.157)$$

alors :

$$a(u_L) < a(u_R) \quad (6.158)$$

Les caractéristiques s'éloigneraient du choc. On aurait un choc de raréfaction, qui violerait la condition d'entropie 6.156.

Conclusion

En définitive, pour capter correctement un choc, il faut utiliser la formulation conservative mathématique issue des principes de conservation physique, avec les variables conservatives, et pour garantir l'unicité, imposer la condition d'entropie. On verra par la suite que lors de la formulation discrète des équations certains schémas vérifient automatiquement la condition d'entropie.

Chapter 7

SCHÉMAS DE DISCRÉTISATION CONSERVATIFS

7.1 Introduction

La recherche de solution à des problèmes numériques où apparaissent des discontinuités, telles que les ondes de choc, imposent des contraintes, d'une part sur la formulation mathématique des équations de base, et d'autre part sur les schémas numériques mis en oeuvre. Ainsi, il est possible de formuler les équations de base, soit sous forme différentielle non conservative, soit sous forme intégrale. Par ailleurs, les variables utilisées peuvent être les variables primitives ou les variables conservatives. Or, on a vu précédemment que les formulations basées sur les variables autres que les variables conservatives donnent de mauvaises conditions de choc : l'intensité du choc, sa vitesse et sa position sont fausses. En fait, on peut démontrer que les schémas dit non-conservatifs ne convergent pas vers la bonne solution.

Ainsi, pour l'équation linéaire sous forme non-conservative $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, avec des valeurs initiales régulières, les méthodes classiques donnent des résultats relativement corrects. Par contre, si des discontinuités apparaissent, les difficultés commencent. Ainsi, les techniques du premier ordre ont tendance à atténuer les discontinuités de manière inacceptable (de tels schémas sont dissipatifs). Les schémas classiques du second ordre ou d'ordre supérieur génèrent quant-à-eux des oscillations aux voisinages des discontinuités.

Mais en plus, les schémas sous forme non conservative, ne peuvent trouver les chocs sans l'utilisation explicite des relations de Rankine-Hugoniot pour capturer les chocs (technique de capture de choc).

Il faut cependant aussi noter qu'il y a des difficultés supplémentaires pour les problèmes non-linéaires, qui n'apparaissent pas pour les problèmes linéaires. Ainsi, on peut dériver une infinité de loi de conservation qui sont équivalentes pour des solutions régulières, mais qui peuvent avoir différentes solutions faibles. Ces solutions si elles existent d'un point de vue mathématique n'ont pas nécessairement de sens physique. En effet, les solutions faibles des lois de conservations hyperboliques ne sont pas déterminées de manière unique par la donnée des valeurs initiales. Enfin, même si on a la bonne formulation mathématique, on a vu qu'une condition d'entropie est parfois nécessaire pour obtenir la solution physique correcte.

7.2 Première approche

Considérons la formulation conservative de l'équation de Burgers non-linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

avec :

$$f(u(x, t)) = \frac{1}{2}u^2(x, t) \quad (7.2)$$

et introduisons le **schéma rétrograde** suivant :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[\frac{(U_j^n)^2}{2} - \frac{(U_{j-1}^n)^2}{2} \right] \quad (7.3)$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Si on effectue les calculs avec les mêmes données déjà utilisée pour une discontinuité et avec $\lambda = 1/2$, on obtient:

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.25 & 0. & 0. & 0. & 0. & 6.25 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.11 & 0.39 & 0. & 0. & 0. & 6.5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.05 & 0.66 & 0.038 & 0. & 0. & 6.75 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.02 & 0.826 & 0.1465 & 0. & 0. & 7 \end{array} \right] \quad (7.4)$$

On voit donc bien sur la figure 1 que la solution évolue correctement mais avec

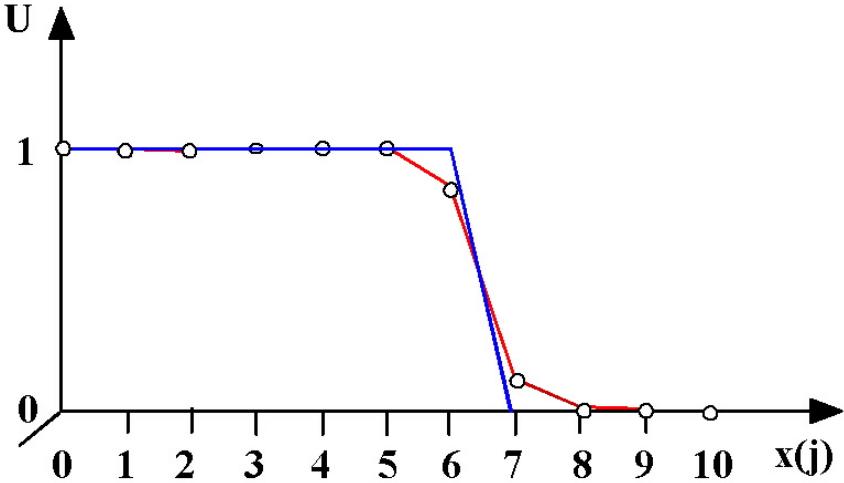


Figure 1 Schéma conservatif avec $f(U_j^n) = \frac{1}{2}U_j^n$

un certain amortissement. Cette forme n'est cependant pas la forme conservative

numérique correcte comme nous allons le voir immédiatement. En effet, la formulation n'est valable que pour une problème où la propagation des ondes va de la gauche vers la droite (schéma rétrograde). On aura évidemment des difficultés si les ondes se propagent dans l'autre sens.

7.3 Formulation intégrale simplifiée au problème monodimensionnel

Considérons pour notre problème monodimensionnel instationnaire (figure 2) les cellules de calcul sous forme rectangulaire $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$. On a maintenant à faire à des moyennes sur les cellules définies sur un volume fini. Soit alors un domaine $[0, L] \times [0, T]$ dans le plan x, t . On décompose le domaine de longueur L selon x en M "volumes finis" tels que (figure 2):

$$x_{j-1/2} = (j - 1) \Delta x \leq x \leq x_{j+1/2} = (j + 1) \Delta x \quad (7.5)$$

avec :

$$x_{j-1/2} - x_{j+1/2} = \Delta x = \frac{L}{M} \quad (7.6)$$

et

$$t^{n+1} - t^n = \Delta t \quad (7.7)$$

La valeur moyenne sur la face de la cellule j , au temps $t = t^n = n\Delta t$ est :

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx \quad (7.8)$$

La valeur moyenne ainsi obtenue sera assignée au centre j de la face. L'équation sous forme conservative est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (7.9)$$

On intègre alors sur le domaine de calcul défini par le "volume" $V = dxdt$.

$$\int_V \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} \right\} dxdt = 0 \quad (7.10)$$

Si $u(x, t)$ est une solution de l'équation 7.9, elle satisfait la formulation intégrale de la loi de conservation:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \{u(x, t^{n+1})\} dx = \quad (7.11)$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \{u(x, t^n)\} dx - \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \quad (7.12)$$

En divisant par Δx et en utilisant la définition de la moyenne sur une face (voir 7.8), il vient :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \quad (7.13)$$

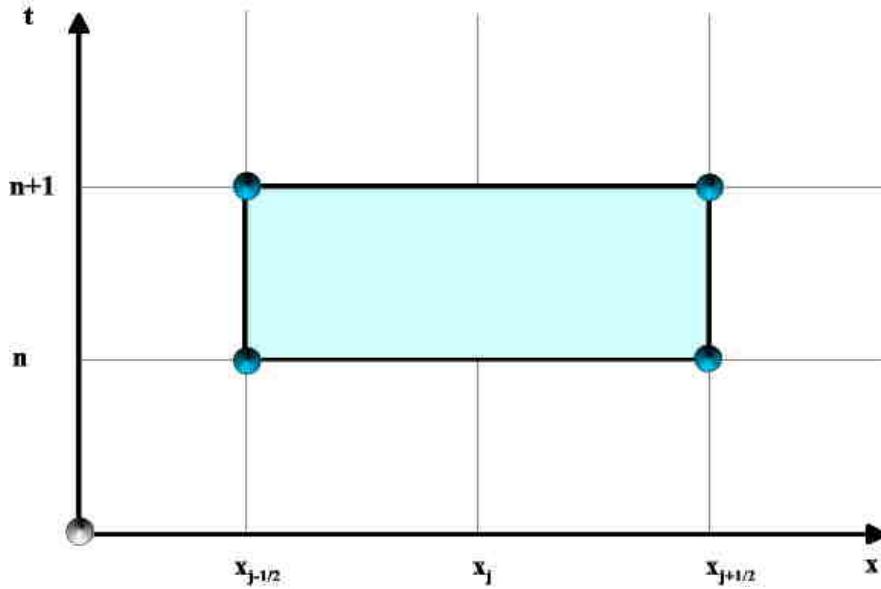


Figure 2 Domaine de calcul

On introduit alors **la fonction de flux numérique** $F(U_j^n, U_{j+1}^n)$ qui joue le rôle d'un flux moyen $F_{j+1/2}^n$ en $x_{j+1/2}$ sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$.

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = F_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (7.14)$$

Par suite, la relation 7.13 prend la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] \quad (7.15)$$

Pour résoudre 7.15 il faut une relation pour déterminer le flux sur les interfaces. En effet, seules sont connues à priori, comme résultats de calcul les valeurs de U_j^n aux centres des faces. On peut par exemple considérer l'approximation :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (F_j^n (U_j^n) + F_{j+1}^n (U_{j+1}^n)) \quad (7.16)$$

d'où :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{j+1}^n - F_{j-1}^n] \quad (7.17)$$

Ainsi, il existe un moyen pour garantir que la méthode numérique ne convergera pas vers une fausse solution. *On doit écrire la méthode numérique elle-même sous forme conservative*, c'est-à-dire si on considère la formulation semi-discrète :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [F_{j+1/2}(U_{j-p}^n, U_{j-p+1}^n, \dots, U_{j+q}^n) - F_{j-1/2}(U_{j-p-1}^n, U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q-1}^n)] \quad (7.18)$$

et, par exemple avec un schéma d'intégration temporel de type Euler :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda [F_{j+1/2}(U_{j-p}^n, U_{j-p+1}^n, \dots, U_{j+q}^n) - F_{j-1/2}(U_{j-p-1}^n, U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q-1}^n)] \quad (7.19)$$

où F est la fonction de flux numérique, fonction de $p + q + 1$ arguments et λ le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Ainsi dans le cas simple où $p = 0$ et $q = 1$, F est fonction de deux variables et l'on obtient :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda [F_{j+1/2}(U_j^n, U_{j+1}^n) - F_{j-1/2}(U_{j-1}^n, U_j^n)] \quad (7.20)$$

La fonction *flux numérique* $F_{j+1/2}$ sur l'interface $j + 1/2$ est une approximation du flux physique $f(u)$.

7.3.1 Application à l'équation de Burgers

Si on applique tout d'abord la formulation 7.15 à l'équation scalaire de convection, une formulation du flux numérique peut s'écrire $F = aU$, et le schéma obtenu se réduit à **une formulation qui est instable**. Pour le rendre stable, on introduit la formulation de Lax-Friedrichs. La relation 7.17 devient alors :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{j+1}^n - F_{j-1}^n] \quad (7.21)$$

Cette relation n'a pas la forme conservative 7.17. Mais on peut écrire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{1}{2} (U_{j+1}^n - U_j^n - U_j^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{j+1}^n + F_j^n - F_j^n - F_{j-1}^n] \quad (7.22)$$

Si maintenant on pose pour le flux numérique :

$$F_{j+1/2}^{*n} = \frac{1}{2} [F_{j+1}^n + F_j^n] - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.23)$$

le schéma 7.24 peut être considéré comme formellement équivalent à 7.15 :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2}^{*n} - F_{j-1/2}^{*n}] \quad (7.24)$$

Appliquons le schéma 7.24 sur notre exemple de base, on obtient :

$n \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	\sum
0	1	1	1	1	1	0.	0.	0.	0.	0.	5
1	1	1	1	1	0.75	0.75	0.	0.	0.	0.	5.5
2	1	1	1	0.984	0.984	0.516	0.516	0.	0.	0.	6
3	1	1	0.999	0.999	0.925	0.925	0.324	0.324	0.	0.	6.5
4	1	1.00	1.00	0.997	0.997	0.812	0.812	0.188	0.188	0.	7

Cette solution est correcte (figure 3), même si l'on obtiendra de meilleures solutions par la suite.

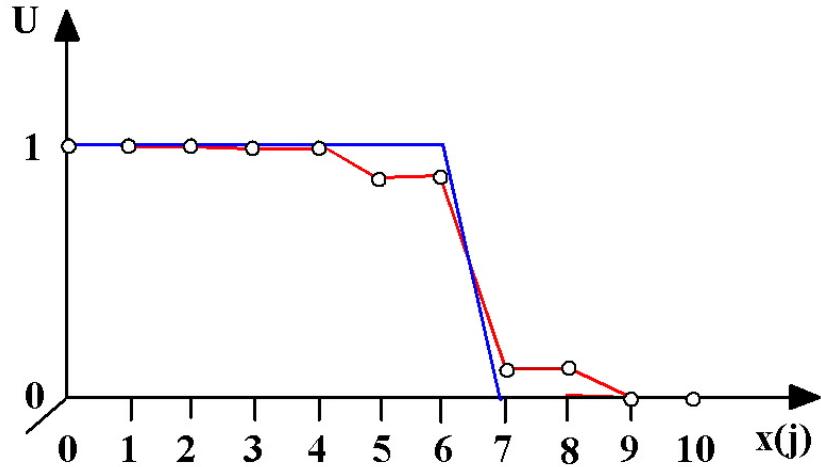


Figure 3 Formulation conservative de LF

7.3.2 Consistance de la formulation conservative

La formulation du flux numérique des schémas conservatifs doit être **consistante** avec le flux physique. La méthode 7.15 est dite *consistante* avec l'équation différentielle conservative de départ, si la fonction de flux numérique $F_{j+1/2}$ calculée sur l'interface $j+1/2$ se réduit à la valeur vraie du flux f dans le cas d'écoulement uniforme constant, c'est-à-dire si l'on a :

$$U(x, t) = V = Cte \quad (7.25)$$

on doit vérifier que :

$$F_{j+1/2}(V, V) = f(V) \quad \forall V \quad (7.26)$$

On demande en plus une certaine régularité, de manière à ce que lorsque les deux arguments de $F_{j+1/2}$ approchent une valeur commune, U , par exemple, la valeur de $F_{j+1/2}$ tend vers $f(U)$ régulièrement. Pour la consistance, il suffit que $F_{j+1/2}$ soit une fonction continue au sens de Lipschitz pour chacune des variables. On dira que $F_{j+1/2}$ est continue au sens de Lipschitz en U , s'il existe une constante $K >> 0$, qui peut dépendre de U telle que :

$$|F_{j+1/2}(V, W) - f(U)| = K_{Max}(|V - U|, |W - U|) \quad (7.27)$$

pour tout V, W avec $|V - U|$ et $|W - U|$ suffisamment petit. Plus généralement, si le flux dépend de plus de deux variables (et l'on verra que cela est nécessaire), la méthode est consistante si :

$$F(U, U, \dots, U) = f(U) \quad (7.28)$$

7.4 Extension des schémas-q sous forme conservative

Le *schéma-q* est un bon schéma pour comprendre les procédures de construction de schémas de haute résolution que nous étudierons plus loin. Nous avons déjà vu qu'il comprend les schémas *L.F.*, *C.I.R* et *L.W.*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{q}{2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (7.29)$$

7.4.1 Schémas-q pour l'équation de Burgers

Dans la formulation du *schéma-q* pour l'équation de Burgers linéaire, q est une fonction du nombre de Courant c :

$$c = \frac{\Delta t}{\Delta x} a \quad (7.30)$$

Dans le cas non linéaire, avec des flux $f(u)$ non linéaires, la vitesse de propagation a est donné par : $a = \frac{df}{du}$ et q est une fonction du nombre de Courant local :

$$c(u) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{df}{du} \quad (7.31)$$

Pour l'équation de Burgers non linéaire, $a = \frac{df}{du} = u$ le nombre de Courant, variable s'exprime donc par :

$$c(u) = \frac{\Delta t}{\Delta x} u \quad (7.32)$$

Lors de la formulation 7.29 du *schéma-q*, on doit réaliser que le paramètre $q = q(c(u))$ doit être évalué entre deux points successifs puisque il est fonction de c et que c est lui-même fonction de u , et par conséquent re-écrire la relation 7.29 sous la forme suivante:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{j+1/2}^n (U_{j+1}^n - U_j^n) - \mathbf{q}_{j-1/2}^n (U_j^n - U_{j-1}^n)) \quad (7.33)$$

$\mathbf{q}_{j+1/2}^n$ est une représentation de $q(u)$ sur la cellule $[x_j, x_{j+1}]$ calculée avec les valeurs discrètes de u en x_j , et x_{j+1} :

$$\mathbf{q}_{j+1/2}^n = \mathbf{q}_{j+1/2}^n (U_{j+1}^n, U_j^n) \quad (7.34)$$

On a ainsi une fonction de deux arguments avec la propriété :

$$q(V, V) = q(V) \quad (7.35)$$

Ainsi, pour l'équation de Burgers non linéaire, on introduira tout d'abord, pour définir $\frac{df}{du} = u$:

$$U_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_j^n) \quad (7.36)$$

On calcule ensuite :

$$c_{j+1/2}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{j+1/2}^n \quad (7.37)$$

On obtient alors facilement pour les *schémas-q* principaux les valeurs de $q_{j+1/2}^n$ suivants:

$$q_{j+1/2}^n = 1 \quad L.F. \quad (7.38)$$

$$q_{j+1/2}^n = \lambda |U_{j+1/2}^n| = |c_{j+1/2}^n| \quad C.I.R \quad (7.39)$$

$$q_{j+1/2}^n = (\lambda U_{j+1/2}^n)^2 = (c_{j+1/2}^n)^2 \quad L.W. \quad (7.40)$$

7.4.2 Schémas q sous forme conservative

Considérons la formulation 7.33 du *schéma-q* :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{j+1/2}^n (U_{j+1}^n - U_j^n) - \mathbf{q}_{j-1/2}^n (U_j^n - U_{j-1}^n)) \quad (7.41)$$

En remarquant que l'on peut écrire:

$$\frac{1}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{1}{2} (f_{j-1} + f_j) \quad (7.42)$$

La relation 7.41 s'écrit sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[\begin{array}{l} \left\{ \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{q_{j+1/2}^n}{2\lambda} (U_{j+1}^n - U_j^n) \right\} \\ - \left\{ \frac{1}{2} (f_{j-1} + f_j) - \frac{q_{j-1/2}^n}{2\lambda} (U_j^n - U_{j-1}^n) \right\} \end{array} \right] \quad (7.43)$$

En tenant compte de la formulation conservative avec $F_{j+1/2}^n = F(U_{j+1}^n, U_j^n)$, c'est-à-dire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] \quad (7.44)$$

On obtient le flux numérique $F_{j+1/2}^n$ correspondant à la formulation conservative du schéma *q* en posant :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{q_{j+1/2}^n}{2\lambda} (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.45)$$

7.5 Autres schémas numériques sous forme conservative

On considèrera donc dorénavant les schémas de la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] \quad (7.46)$$

où $F_{j+1/2}$, est la fonction de flux numérique.

7.5.1 Schémas du premier ordre

Considérons le schéma *C.I.R.* pour lequel :

$$q_{j+1/2}^n = \lambda |U_{j+1/2}^n| \quad C.I.R \quad (7.47)$$

La relation 7.45 s'écrit alors sous la forme :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{1}{2} |U_{j+1/2}^n| (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.48)$$

et pour l'équation scalaire où $U_{j+1/2}^n = a$:

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{1}{2} |a| (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.49)$$

ou si a varie :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \frac{1}{2} |a_{j+1/2}^n| (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.50)$$

7.5.2 Schémas du second ordre

Lax-Wendroff

Considérons le schéma *L.W.* pour lequel :

$$q_{j+1/2}^n = \lambda^2 (U_{j+1/2}^n)^2 \quad L.W. \quad (7.51)$$

La relation 7.45 s'écrit sous la forme suivante pour l'équation de Burgers :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{j+1}^n + f_j^n) - \lambda (U_{j+1/2}^n)^2 (U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (7.52)$$

et pour l'équation de convection scalaire :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{j+1}^n + f_j^n) - \lambda a^2 (U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (7.53)$$

ou si a varie:

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [a_{j+1/2}^n (U_{j+1}^n + U_j^n) - \lambda (a_{j+1/2}^n)^2 (U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (7.54)$$

Schéma de Warming et Beam

Considérons le schéma de Warming et Beam appliquée à l'équation d'onde scalaire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c (U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2} c(c-1) (U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) \quad (7.55)$$

On peut écrire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[a (U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2} a(c-1) (U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) \right] \quad (7.56)$$

soit :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[(aU_j^n - aU_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(c-1)(aU_j^n - 2aU_{j-1}^n + aU_{j-2}^n) \right] \quad (7.57)$$

ou :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[(f_j^n - f_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(c-1)(f_j^n - 2f_{j-1}^n + f_{j-2}^n) \right] \quad (7.58)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left[\frac{1}{2}(c-1)f_{j-1}^n + \frac{1}{2}(3-c)f_j^n - \frac{1}{2}(c-1)f_{j-2}^n - \frac{1}{2}(3-c)f_{j-1}^n \right] \quad (7.59)$$

et finalement, on obtient le flux numérique de la forme conservative du schéma de Warming et Beam :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(c-1)f_{j-1}^n + \frac{1}{2}(3-c)f_j^n \quad (7.60)$$

7.5.3 Exemple

L'exemple suivant pour un écoulement subsonique-subsonique dans une tuyère montre clairement, pour un schéma donné (ici le schéma de Harten), la différence de comportement de ce schéma écrit sous forme non-conservative (figure 4). et sous

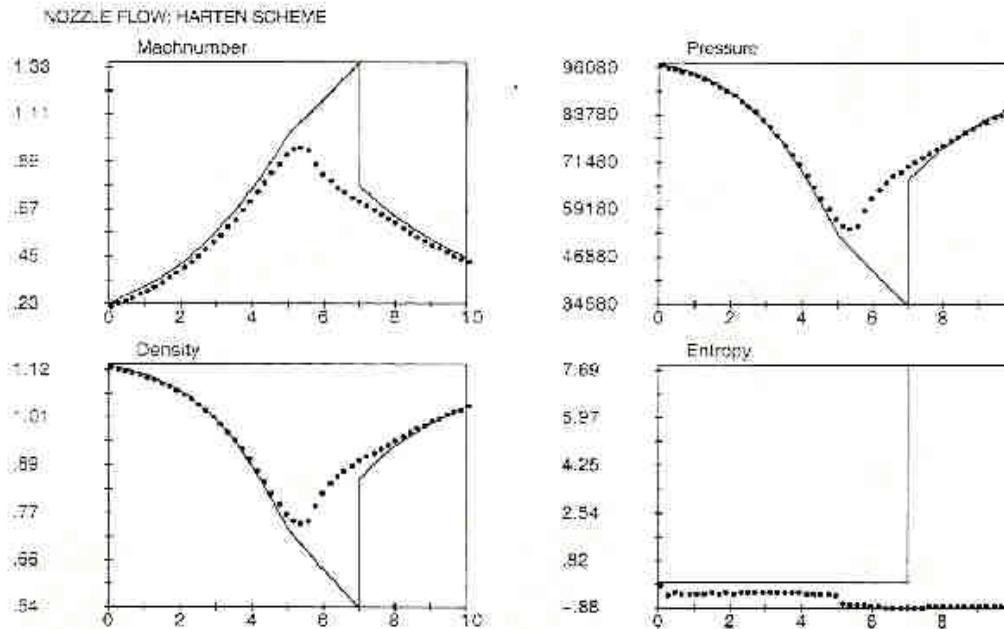


Figure 4 Formulation non conservative du schéma de Harten

forme conservative (figure 5).

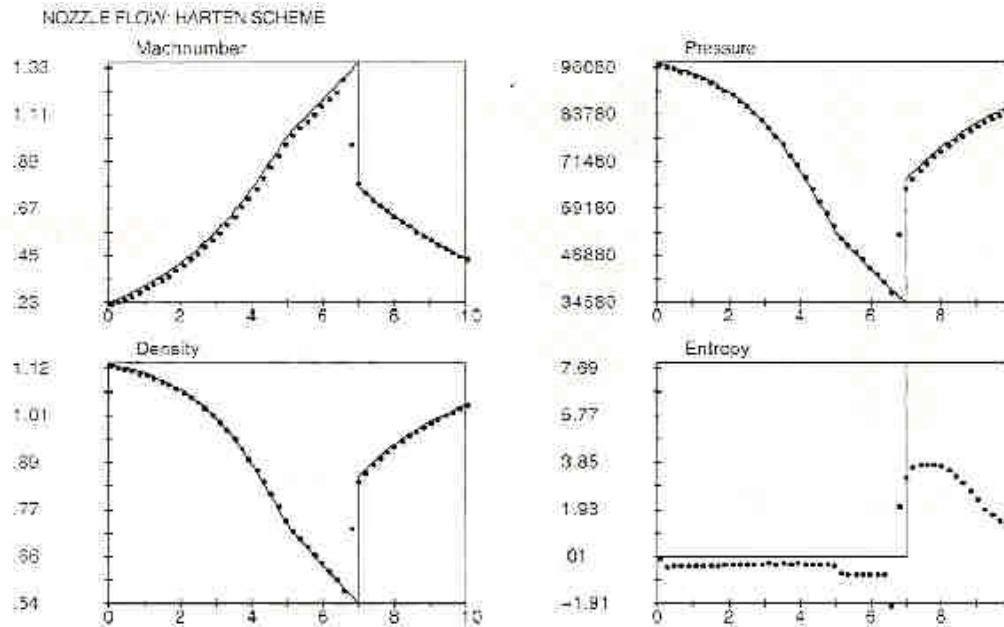


Figure 5 Formulation conservative du schéma de Harten

7.5.4 Conclusion

Par cette étude, on a montré comment construire des schémas conservatifs. Nous savons que grâce à ce type de schéma, la méthode garantira que les chocs pourront être capturer, puisque cette méthode vérifie automatiquement les relations du choc de Rankine-Hugoniot. Dans la suite, nous allons chercher à construire des schémas qui soient conservatifs et monotones.

7.6 Méthode de Godunov

7.6.1 Introduction

Godunov a été le premier à développer un schéma numérique conservatif du *premier ordre*, extension du schéma *C.I.R.* pour les équations non-linéaires. Le principal élément de la méthode de Godunov est l'*introduction de la solution du problème de Riemann* qui peut être obtenue, soit de manière exacte, soit de manière approximée.

7.6.2 Elaboration de la méthode de Godunov avec l'équation scalaire de convection

La méthode de Godunov est une méthode conservative où les flux numériques $F_{j+1/2}^n$ sont calculés en utilisant les solutions du problème local de Riemann. Une hypothèse de base est que la distribution des données à un instant t est **constante par morceau**. Les données sur l'interface $j + 1/2$ au temps n sont le couple de valeurs $[U_j^n, U_{j+1}^n]$ représentant les valeurs moyennes de U_k^n sur les cellules j et $j + 1$.

Localement on peut alors définir le problème de Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (7.61)$$

avec :

$$u(x, 0) = u_o(x) = \begin{cases} u_j & \text{si } x < 0 \\ u_{j+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.62)$$

Ainsi à chaque pas de temps n , et sur chaque interface on a un problème local de Riemann à résoudre. Et ce que l'on cherche est la solution globale au temps $n + 1$. Trois étapes interviennent dans la méthode de Godunov pour trouver la solution U_j^{n+1} au temps $n + 1$ à partir de la solution U_j^n au temps n .

- Etape I (figure 6)

Etant donnée une distribution complète de valeurs initiales, on détermine les moyennes à un instant donné n sur chaque face j du maillage (x, t^n) .

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(x, t) dx, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad (7.63)$$

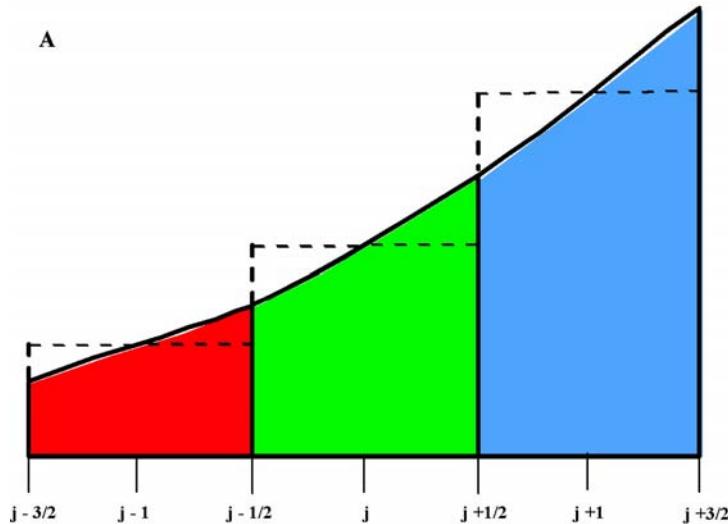


Figure 6 Etape I

- Etape II (figure 7)

Cette étape physique est obtenue de la solution exacte sur l'interface. Pour l'équation linéaire de convection, la discontinuité est convectée sur une distance $a\Delta t$

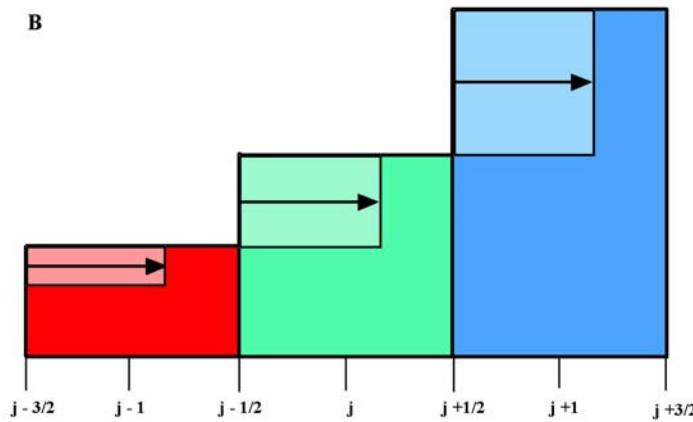


Figure 7 Etape II

sans modification. Lorsque $a > 0$, on obtient à partir des données initiales (au pas de temps n) :

$$U(x, t^{n+1}) = U(x, t^n + \Delta t) = U(x - a\Delta t, t^n) \quad (7.64)$$

Le pas de temps devant vérifier la condition *CFL* :

$$c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (7.65)$$

ce qui implique que le déplacement ne sera jamais supérieur à Δx .

- Etape III (figures 8&9) : on détermine alors une nouvelle moyenne:

Or, sur chaque interface, sur l'interface $j + 1/2$ par exemple, un observateur verrait en général, à sa droite une certaine valeur U_{j+1}^n et à sa gauche une autre valeur U_j^n puisque on a supposé que les valeurs de U_j^n étaient constantes par morceau sur chaque cellule j : il serait sur une discontinuité. Comment alors calculer les flux sur cette interface ? On l'a vu dans la première partie: on doit chercher la solution du problème de Riemann sur les interfaces $j - 1/2$ et $j + 1/2$. En effet, nous avons deux problèmes de Riemann (*p.R.*) à résoudre sur chaque interface de la cellule j : *p.R.*(U_{j-1}^n, U_j^n) et *p.R.*(U_j^n, U_{j+1}^n). La solution exacte du *p.R.*(U_{j-1}^n, U_j^n) lorsque $a > 0$ est :

$$U_{j-1/2}^n(x/t) = \begin{cases} U_{j-1}^n & \text{si } x/t < a \\ U_j^n & \text{si } x/t > a \end{cases} \quad (7.66)$$

où l'origine du problème de Riemann *local* est $(0, 0)$ ou $(x_{j-1/2} = (j - 1/2) \Delta x, t^n)$. De même la solution exacte du *p.R.*(U_j^n, U_{j+1}^n) est :

$$U_{j+1/2}^n(x/t) = \begin{cases} U_j^n & \text{si } x/t < a \\ U_{j+1}^n & \text{si } x/t > a \end{cases} \quad (7.67)$$

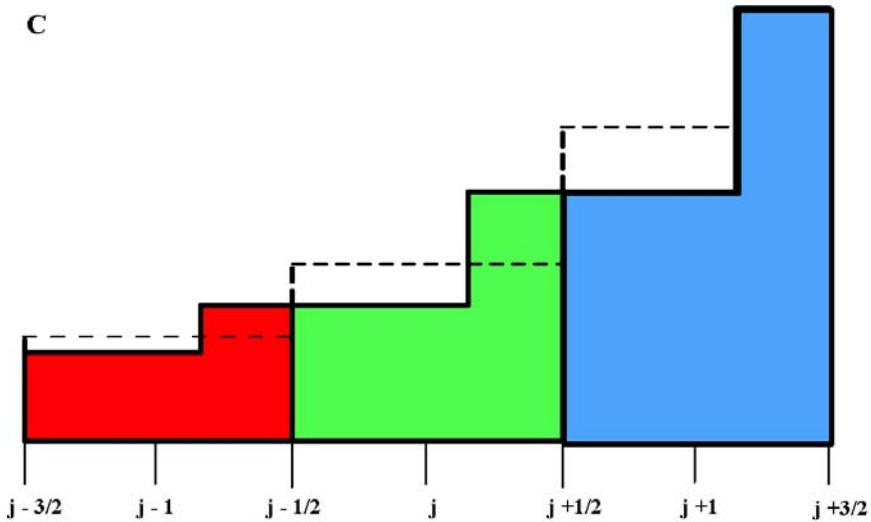


Figure 8 Etape IIIa

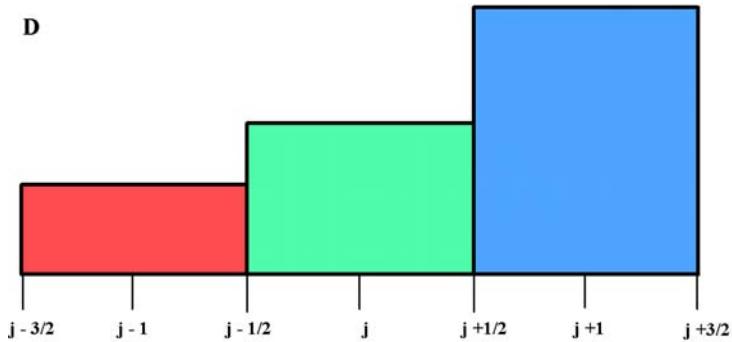


Figure 9 Etape IIIb

Le schéma de Godunov est alors :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{\Delta x/2} U_{j-1/2}^n(x/\Delta t) dx + \int_{-\Delta x/2}^0 U_{j+1/2}^n(x/\Delta t) dx \right] \quad (7.68)$$

Cette intégrale est évaluée au temps Δt (temps local) entre les points A et D (figure 10). On utilise seulement la moitié de la solution de $U_{j-1/2}^n(x/t)$ et de $U_{j+1/2}^n(x/t)$. Chacune a son repère local d'origine $(0, 0)$ correspondant aux interfaces $x_{j-1/2}$ et $x_{j+1/2}$. Dans ces conditions, on impose la condition CFL sous la forme :

$$c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad (7.69)$$

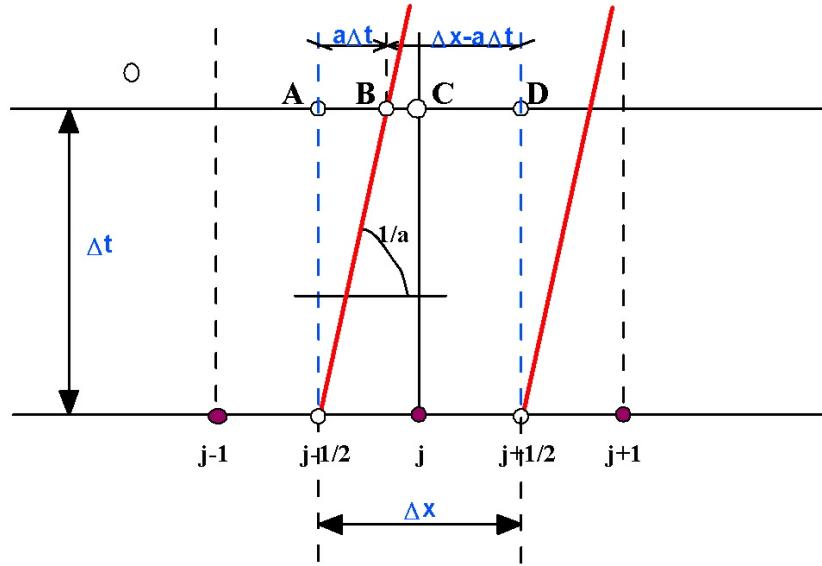


Figure 10 Calculs aux interfaces

On a :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} U_{j-1/2}^n(x/\Delta t) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_A^B U_{j-1/2}^n(x/\Delta t) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_B^C U_{j-1/2}^n(x/\Delta t) dx \quad (7.70)$$

soit, sachant que $AB = c\Delta x$ et $BC = \left(\frac{1}{2} - c\right) \Delta x$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} U_{j-1/2}^n(x/\Delta t) dx = cU_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} - c\right) U_j^n \quad (7.71)$$

et :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 U_{j+1/2}^n(x/\Delta t) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_C^D U_{j+1/2}^n(x/\Delta t) dx = \frac{1}{2} U_j^n \quad (7.72)$$

soit :

$$U_j^{n+1} = \left[cU_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} - c\right) U_j^n \right] + \left[\frac{1}{2} U_j^n \right] = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (7.73)$$

Le résultat n'est rien d'autre, du point de vue de la forme, que le schéma C.I.R décentré du premier ordre. **Mais dans l'approche de Godunov, U_j^n et U_{j-1}^n sont des valeurs moyennes** selon la définition 7.63 et non des valeurs locales.

Résumé

Il est important de résumer le processus précédent. *Dans l'approche de Godunov, on utilise une approche intégrale conservative. Cela conduit à introduire des valeurs*

constantes par morceaux, et de déterminer sur chaque interface la valeur des flux. Ceci implique alors pour le calcul correct de ce flux à introduire la résolution d'un problème de Riemann local. Ce n'est qu'après avoir résolu ce problème que l'on peut déterminer la solution au temps $n+1$. Le résultat final avec des valeurs constantes par morceau est précis à l'ordre 1.

7.6.3 Deuxième approche de Godunov

Etant donnée une distribution complète de valeurs initiales, on détermine les moyennes sur chaque face du maillage spatial au temps $n+1$.

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \bar{u}(x, t) dx, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \quad (7.74)$$

où $\bar{u}(x, t)$ représente la **solution combinée des problèmes de Riemann** $p.R.(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $p.R.(U_j^n, U_{j+1}^n)$. La solution $\bar{u}(x, t)$ est une solution exacte de l'équation originale de conservation (nous verrons plus loin comment la calculer), par conséquent on peut utiliser la formulation intégrale suivante appliquée au domaine $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [0, \Delta t]$; on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \bar{u}(x, \Delta t) dx &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \bar{u}(x, 0) dx + \\ &\quad \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j-1/2}, t)) dt - \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j+1/2}, t)) dt \end{aligned} \quad (7.75)$$

En utilisant la définition des moyennes selon x, on a :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \quad (7.76)$$

soit :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2} - F_{j-1/2}] \quad (7.77)$$

avec, comme flux numérique en $j + 1/2$:

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (7.78)$$

et en $j - 1/2$:

$$F_{j-1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\bar{u}(x_{j-1/2}, t)) dt \quad (7.79)$$

Pour le cas particulier de l'équation de convection scalaire, on a :

$$F_{j+1/2} = aU_j^n, F(x_{j-1/2}, t) = aU_{j-1}^n \quad (7.80)$$

d'où, en introduisant le nombre de Courant c :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c [U_j^n - U_{j-1}^n] \quad (7.81)$$

et on retrouve le schéma *C.I.R.* Ainsi, en utilisant la formulation intégrale de conservation sur un volume fini $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [0, \Delta t]$ de l'espace $x - t$ on arrive à la formulation conservative 7.77 avec les flux sur les interfaces $F_{j+1/2}$ et $F_{j-1/2}$. Ces flux numériques sont les moyennes temporelles du flux physique évalué sur les interfaces. L'intégrant $f(\bar{u}(x, t))$ sur chaque interface dépend de la solution exacte $\bar{u}(x, t)$ du problème de Riemann le long de l'axe t dans le système local ; on posera :

$$\bar{U}(x_{j-1/2}, t) = U_{j-1/2}(0), \bar{U}(x_{j+1/2}, t) = U_{j+1/2}(0) \quad (7.82)$$

où $U_{j+1/2}(0)$ représente la solution exacte $\bar{U}(x_{j+1/2}, t)$ du *p.R.*(U_j^n, U_{j+1}^n) en $x/t = 0$. Par suite, les flux numériques sur les interfaces deviennent :

$$F_{j+1/2} = F_{j+1/2}(U_{j+1/2}(0)), F_{j-1/2} = F_{j-1/2}(U_{j-1/2}(0)) \quad (7.83)$$

On appellera **flux de Godunov**, le flux :

$$F_{j+1/2} = F_{j+1/2}(U_{j+1/2}(0)) \quad (7.84)$$

On remarquera que dans cette approche, il n'y plus de restriction particulière sur le nombre CFL.

7.6.4 La méthode de Godunov pour les systèmes linéaires

Jusqu'à présent nous ne nous sommes intéressé qu'à des *équations scalaires* linéaires. Quelques complications apparaissent lorsqu'on doit traiter un problème réel ou tout du moins proche de la réalité comme la résolution des équations d'Euler. Nous allons étudier quelques éléments complémentaires pour l'étude de système d'équations hyperboliques.

Formulation classique

Considérons le système hyperbolique linéaire à coefficients constants sous la forme conservative suivante (voir les équations d'Euler pour plus de détail) :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (7.85)$$

avec la propriété :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathcal{A}\mathbf{U} \quad (7.86)$$

La méthode de Godunov, décentrée du premier ordre, utilise la formulation conservative :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}] \quad (7.87)$$

où le flux numérique de Godunov est donné par :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{U}_{j+1/2}(0)) \quad (7.88)$$

Cette méthode est du premier ordre; on utilise des fonctions qui sont constantes par morceau: les valeurs de la fonction \mathbf{U} sont alors une séquence d'états constants séparés par des sauts au niveau des interfaces des cellules. Par conséquent, on doit connaître la solution du problème de Riemann $p.R.(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n), \mathbf{U}_{j+1/2}(x/t)$ pour le calcul du flux $\mathbf{F}_{j+1/2}$ (et $\mathbf{F}_{j-1/2}$) sur l'interface des cellules en $x/t = 0$:

Approche découpée

Soit :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathcal{A}\mathbf{U}_{j+1/2} \quad (7.89)$$

Cela revient à déterminer :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x < 0 \\ \mathbf{U}_R & x > 0 \end{cases} \quad (7.90)$$

ou bien en introduisant les variables caractéristiques \mathbf{W} :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathcal{R}^{-1}\mathbf{U}_L & x < 0 \\ \mathcal{R}^{-1}\mathbf{U}_R & x > 0 \end{cases}, w_k(x, 0) = \begin{cases} w_{k,L} & x < 0 \\ w_{k,R} & x > 0 \end{cases} \quad (7.91)$$

où la solution exacte est :

$$w_k(x, t) = w_k(x - \lambda_k t, 0) \quad (7.92)$$

Considérons une onde isolée de vitesse λ_k . Que se passe-t-il pour \mathbf{U} ? On a la propriété :

$$\mathbf{I}^{(k)} \cdot \mathcal{A} = \lambda_k \mathbf{I}^{(k)} \quad (7.93)$$

avec :

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{I}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

On cherche alors les valeurs \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R du problème de Riemann telles que:

$$\mathbf{U}_L = \begin{cases} \mathbf{U}_{j-1} & \lambda_k > 0 \\ \mathbf{U}_j & \lambda_k < 0 \end{cases} \quad (7.95)$$

et :

$$\mathbf{U}_R = \begin{cases} \mathbf{U}_j & \lambda_k > 0 \\ \mathbf{U}_{j+1} & \lambda_k < 0 \end{cases} \quad (7.96)$$

On résout alors le problème de Riemann avec :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & x < 0 \\ \mathbf{U}_R & x > 0 \end{cases} \quad (7.97)$$

si bien que :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_L + \sum_{\lambda_k < x/t} \gamma_k \nu^{(k)} \quad (7.98)$$

où :

$$\gamma_k = \mathbf{l}^{(k)} \cdot (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (7.99)$$

A partir de ce résultat, on peut écrire :

$$\mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}(x, t) = \mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}_L + \mathbf{l}^{(k)} \cdot \sum_{\lambda_{k'} < x/t} \gamma_{k'} \nu^{(k')} \quad (7.100)$$

avec, pour $\lambda_k \geq x/t$:

$$\mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}(x, t) = \mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}_L = w_{k,L} \quad (7.101)$$

et pour $\lambda_k < x/t$:

$$\mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}(x, t) = \mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}_L + \mathbf{l}^{(k)} \cdot (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) = \mathbf{l}^{(k)} \cdot \mathbf{U}_R = w_{k,R} \quad (7.102)$$

w_k représente l'amplitude de la perturbation pour l'onde k :

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0 \quad (7.103)$$

Approche couplée

On peut déterminer la solution $\mathbf{U}_{j+1/2}(x/t)$ en décomposant les données initiales $\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n$ en fonction des vecteurs propres droits :

$$\mathbf{U}_j^n = \sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k \nu^{(k)}, \mathbf{U}_{j+1}^n = \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \nu^{(k)} \quad (7.104)$$

La solution générale en tout point x, t est donnée par :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(x/t) = \sum_{k=1}^{k=I} \alpha_k \nu^{(k)} + \sum_{k=I+1}^{k=m} \beta_k \nu^{(k)} \quad (7.105)$$

où I est le plus grand entier pour lequel on a :

$$1 \leq I \leq m, x/t \geq \lambda_I \quad (7.106)$$

Pour $x/t = 0$, I est tel que $\lambda_I \leq 0$ et $\lambda_{I+1} \geq 0$, par suite on a :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \mathbf{U}_j^n + \sum_{k=1}^{k=I} (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.107)$$

ou :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \mathbf{U}_{j+1}^n - \sum_{k=J+1}^m (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.108)$$

En combinant ces deux formulations, on obtient :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{j+1}^n + \mathbf{U}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{sign}(\lambda_k) (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.109)$$

Pour évaluer le flux de Godunov, on écrit :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \mathcal{A} \mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \mathcal{A} \mathbf{U}_j^n + \sum_{k=1}^{k=I} (\beta_k - \alpha_k) \mathcal{A} \nu^{(k)} \quad (7.110)$$

ou puisque $\mathcal{A} \nu^{(k)} = \lambda_k \nu^{(k)}$:

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}_j^n + \sum_{k=1}^{k=I} (\beta_k - \alpha_k) \lambda_k \nu^{(k)} \quad (7.111)$$

de même à partir de 7.108 :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}_j^n - \sum_{k=J+1}^m (\beta_k - \alpha_k) \lambda_k \nu^{(k)} \quad (7.112)$$

et après combinaison de 7.111 et 7.112 :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |\lambda_k| (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.113)$$

Si $\mathbf{U}_{j+1/2}(0)$ est la solution du problème de Riemann où \mathbf{U}_j et \mathbf{U}_{j+1} sont les valeurs de \mathbf{U} de chaque côté de l'interface, on peut mettre à jour la solution en écrivant :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}(0) - \mathbf{F}_{j-1/2}(0)] \quad (7.114)$$

où :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathcal{A} \mathbf{U}_{j+1/2}(0) \quad (7.115)$$

Définissons :

$$w_{k_j}^n = \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{U}_j^n \quad (7.116)$$

Multiplions le flux $\mathbf{F}_{j+1/2}$ par \mathbf{l}_k :

$$\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{l}_k \cdot \mathcal{A} \mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \lambda_k \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \begin{cases} \lambda_k w_{k_j}^n & \lambda_k > 0 \\ w_{k_{j+1}}^n & \lambda_k < 0 \end{cases} \quad (7.117)$$

Par suite :

$$w_{k_j}^{n+1} = \begin{cases} w_{k_j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k \left[w_{k_j}^n - w_{k_{j-1}}^n \right] & \lambda_k > 0 \\ w_{k_j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k \left[w_{k_{j+1}}^n - w_{k_j}^n \right] & \lambda_k < 0 \end{cases} \quad (7.118)$$

Autres formes du flux de Godunov :

- *Première forme*

Tout d'abord, on rappelle que l'on peut écrire la matrice \mathcal{A} sous la forme:

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \mathcal{D} \mathcal{R}^{-1} \quad (7.119)$$

où \mathcal{R} est la matrice des vecteurs propres propres droits $\nu^{(k)}$ et \mathcal{D} la matrice diagonale. Comme pour le cas scalaire, on introduit les définitions :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \mathcal{D} \mathcal{R}^{-1} \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &= \max(\lambda_k, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_k + |\lambda_k|) \\ \lambda_k^- &= \min(\lambda_k, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_k - |\lambda_k|) \end{aligned} \quad (7.121)$$

on en déduit :

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^- \quad (7.122)$$

et :

$$|\lambda_k| = \lambda_k^+ - \lambda_k^- \quad (7.123)$$

On a aussi les propriétés suivantes, découlant de 7.119:

$$\mathcal{A}^+ \nu^{(k)} = \lambda_k^{+(k)}; \mathcal{A}^- \nu^{(k)} = \lambda_k^{-(k)} \quad (7.124)$$

On écrit alors 7.113 sous la forme :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.125)$$

soit :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) [\lambda_k^+ \nu^{(k)} - \lambda_k^- \nu^{(k)}] \quad (7.126)$$

et d'après 7.124 :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) [\mathcal{A}^+ \nu^{(k)} - \mathcal{A}^- \nu^{(k)}] \quad (7.127)$$

ou :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) [(\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-) \nu^{(k)}] \quad (7.128)$$

et comme :

$$(\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-) = |\mathcal{A}| \quad (7.129)$$

on a finalement :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_j^n) - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) \nu^{(k)} \quad (7.130)$$

- *Deuxième forme*

Puisqu, pour les équations d'Euler, on a:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \mathcal{A} \mathbf{U}_{j+1/2}(0) \quad (7.131)$$

en utilisant les principes de calcul précédents, on peut aisément montrer que :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \mathcal{A}^+ \sum_{k=1}^m \alpha_k \nu^{(k)} + \mathcal{A}^- \sum_{k=1}^m \beta_k \nu^{(k)} \quad (7.132)$$

soit :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathcal{A}^+ \mathbf{U}_j^n + \mathcal{A}^- \mathbf{U}_{j+1}^n = \mathbf{F}_{j+1/2}^+ + \mathbf{F}_{j+1/2}^- \quad (7.133)$$

7.7 Méthode de Godunov pour des problèmes non-linéaires

7.7.1 La base

L'étude de la méthode de Godunov étudié pour des équations ou des systèmes d'équations reste valable. Nous renvoyons donc l'étudiant au chapitre concerné. Pour une meilleure compréhension de l'étude nous considérerons le système des équations d'Euler sous leur forme conservative :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (7.134)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (7.135)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial [u(\rho e_t + p)]}{\partial x} = 0 \quad (7.136)$$

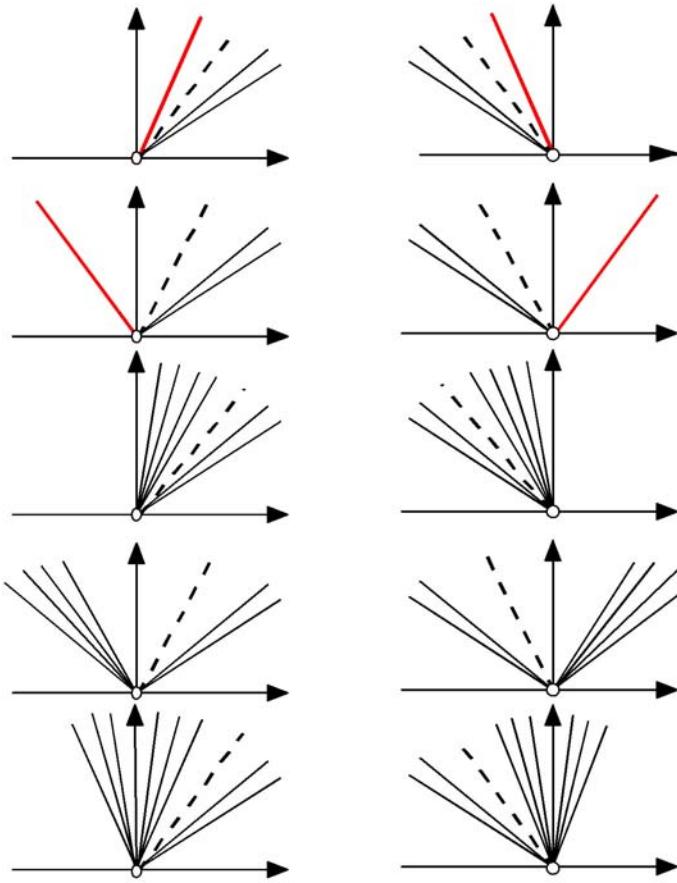


Figure 11 Différentes solutions aux interfaces

ou :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (7.137)$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

ou l'énergie interne totale e_t est :

$$e_t = \frac{1}{2}u^2 + e \quad (7.139)$$

et l'énergie interne e :

$$e = \frac{p}{\rho(\kappa - 1)} \quad (7.140)$$

avec les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^o(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.141)$$

Physiquement la structure du problème de Riemann pour les équations d'Euler est très proche du problème du tube à choc. Dans le cas qui nous intéresse, à savoir une cellule quelconque où sur les interfaces on doit résoudre un problème de Riemann, on supposera que le vide n'est pas présent d'un côté ou de l'autre des faces. Dans ces conditions les structures d'onde possibles, suivant le signe de la vitesse des particules à l'intérieur du domaine limité par les ondes extrêmes de droite et gauche, qui peuvent apparaître sont schématisées sur la figure 11. A gauche de la figure les particules fluides ont une vitesse positive et le contraire sur les figures de droite. On discrétise le domaine spatial $[0, L]$ en M cellule $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ avec $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = L/M$. Dans ces conditions, les caractéristiques des cellules j sont données par :

$$x_{j-1/2} = (j - 1) \Delta x, \quad x_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta x, \quad x_{j+1/2} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x \quad (7.142)$$

On se donne une série de valeurs supposées **déjà calculées** au temps t^n , soit $\hat{\mathbf{U}}(x, t^n)$. Considérons alors l'hypothèse de base de la méthode de Godunov, en introduisant une distribution de données constante par morceau. On définit la moyenne sur une cellule en écrivant :

$$\mathbf{U}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{U}}(x, t^n) dx \quad (7.143)$$

et qui conduit effectivement à une distribution constante par morceau avec :

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}_j^n \quad \text{pour } x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], \forall j \quad (7.144)$$

Les données ainsi modifiées conduisent alors pour chaque interface limite d'une cellule spatiale à un problème de Riemann. Ainsi sur l'interface $j + 1/2$ le *P.R.* $(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)$ en $x_{j+1/2}$ avec les données \mathbf{U}_j^n à gauche et \mathbf{U}_{j+1}^n à droite. On a vu que pour les équations d'Euler, la solution du problème de Riemann local étaient **une solution auto-similaire** dépendant localement du rapport $\frac{\bar{x}}{\bar{t}}$. La solution locale est notée : $\mathbf{U}_{j+1/2}^n(\frac{\bar{x}}{\bar{t}})$ où \bar{x}, \bar{t} sont les coordonnées locales avec $x_{j+1/2}$ (l'interface) pour origine. Considérons alors une solution type du problème de Riemann (figure 12) : On choisit un pas de temps Δt suffisamment petit *mais permettant des interactions d'ondes*. On pourra alors définir une solution globale dans le domaine :

$$0 \leq x \leq L, t^n \leq t \leq t^{n+1} \quad (7.145)$$

en fonction des solutions locales :

$$\hat{\mathbf{U}}(x, t) = \mathbf{U}_{j+1/2}^n\left(\frac{\bar{x}}{\bar{t}}\right), \quad \bar{x} \in [x_j, x_{j+1}] \quad (7.146)$$

et où :

$$\bar{x} = x - x_{j+1/2}, \quad \bar{t} = t - t^n \quad (7.147)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad t \in [t^n, t^{n+1}] \quad (7.148)$$

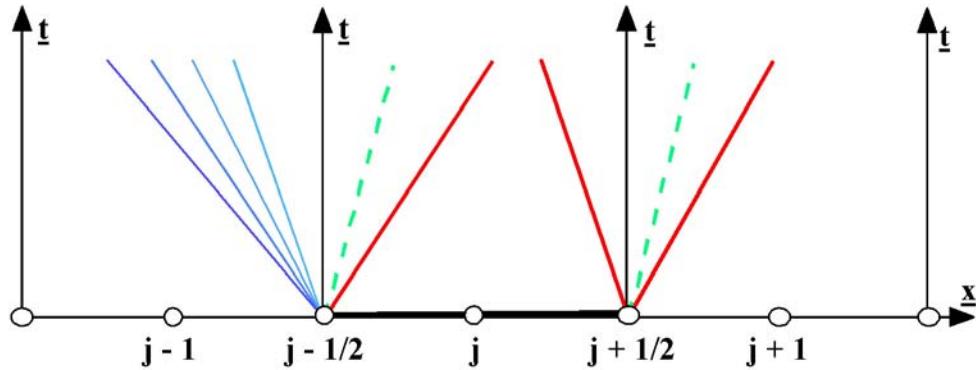
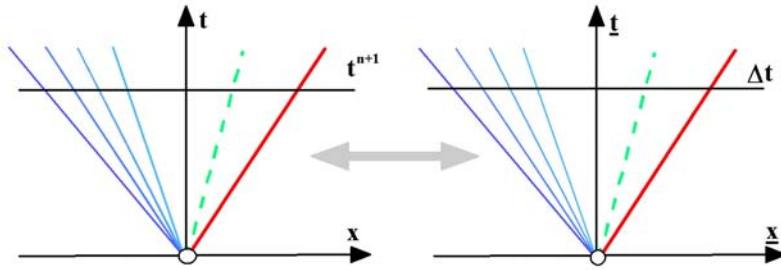
Figure 12 Modèle d'ondes, problème local de Riemann aux interfaces $j - 1/2$ et $j + 1/2$ 

Figure 13 Solution locale

$$\bar{x} \in \left[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} \right], \bar{t} \in [0, \Delta t] \quad (7.149)$$

selon la figure 13. Ainsi ayant trouvé une solution $\hat{\mathbf{U}}(x, t)$ en fonction de solutions locales $\mathbf{U}_{j+1/2}^n(\frac{\bar{x}}{\bar{t}})$ du problème de Riemann, la méthode de Godunov avance alors au temps $n + 1$.

7.7.2 Le schéma de Godunov

On utilisera ici la deuxième approche de Godunov. On a vu que l'intégrant $\hat{\mathbf{U}}(x, t)$ est une solution exacte des lois de conservation.. Ce moyennage est illustré sur la figure 14. Il faut cependant noté, et ce point est important, qu'il est nécessaire de tenir compte de l'amplitude de Δt . On imposera la condition suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_{\max}^n} \quad (7.150)$$

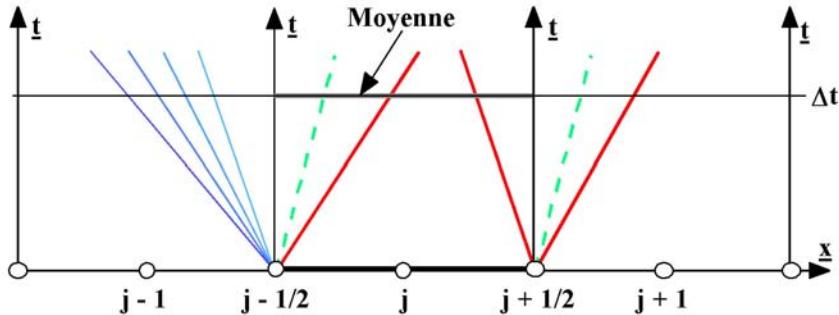


Figure 14 Godunov

où V_{\max}^n représente la vitesse maximum des ondes se propageant dans le domaine. On applique alors la formulation intégrale suivante :

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_2, t)) dt \quad (7.151)$$

pour tout "volume de contrôle" de la forme : $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$. En particulier on peut l'appliquer sur le domaine : $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$. Avec 7.143, on a :

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{U}}(\bar{x}, t^{n+1}) d\bar{x} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{U}}(\bar{x}, t^n) d\bar{x} + \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}(x_{j-1/2}, \bar{t})) d\bar{t} - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}(x_{j+1/2}, \bar{t})) d\bar{t} \quad (7.152)$$

En fonction des solutions locales, avec la condition 7.146, on a :

$$\hat{\mathbf{U}}(x_{j+1/2}, t) = \mathbf{U}_{j+1/2}(0) = Cte \quad (7.153)$$

$$\hat{\mathbf{U}}(x_{j-1/2}, t) = \mathbf{U}_{j-1/2}(0) = Cte \quad (7.154)$$

où $\mathbf{U}_{j+1/2}(0)$ est la solution du problème de Riemann P.R. ($\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}$) le long de la droite $\frac{\bar{x}}{\bar{t}} = 0$ et $\mathbf{U}_{j-1/2}(0)$ est la solution du problème de Riemann P.R. ($\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j$) le long de l'axe \bar{t} . La relation 7.152 devient alors :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{U}}(\bar{x}, t^{n+1}) d\bar{x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{U}}(\bar{x}, t^n) d\bar{x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1/2}(0)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-1/2}(0))] \quad (7.155)$$

ce qui conduit en définitive au résultat suivant : *La méthode de Godunov appliquée à un système peut être écrite sous la forme conservative*

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}] \quad (7.156)$$

avec les flux :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1/2}(0)) \quad (7.157)$$

et la condition :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_{\max}^n} \quad (7.158)$$

Pour déterminer V_{\max}^n , il existe plusieurs méthodes. On peut par exemple pour des problèmes monodimensionnels définir V_{\max}^n par:

$$V_{\max}^n = \max_j \{ |V_{j+1/2}^L|, |V_{j-1/2}^R| \} \quad (7.159)$$

pour $j = 0, \dots, M$, et où $V_{j+1/2}^R$ et $V_{j+1/2}^L$ sont les vitesses des ondes non-linéaires de droite et de gauche.

7.8 La méthode de décomposition des flux

7.8.1 Introduction

Un trait caractéristique des méthodes de discréétisation décentrées est le fait que la discréétisation des équations sur un maillage est mis en place de manière à tenir compte de la direction de propagation de l'information. Ainsi la physique est déjà incorporée dans le schéma numérique. Deux approches sont proposées : l'approche de Godunov, déjà traitée et l'approche de décomposition des flux (FVS = Flux Vector Splitting).

7.8.2 Principe de la méthode

Considérons un système hyperbolique à m équations :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial t} = 0 \quad (7.160)$$

On introduit alors la matrice jacobienne \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (7.161)$$

Cette matrice s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \mathcal{D} \mathcal{R}^{-1} \quad (7.162)$$

où \mathcal{D} est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice \mathcal{A} et la matrice \mathcal{R} telle que les vecteurs colonnes soient les vecteurs propres droits $\nu^{(r)}$ de \mathcal{A} .

$$\mathcal{R} = [\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(m)}] \quad (7.163)$$

Si l'on décompose la matrice \mathcal{D} en deux matrices formées l'une \mathcal{D}^+ de valeurs propres positives et l'autre \mathcal{D}^- de valeurs propres négatives, on a :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^- \quad (7.164)$$

avec les valeurs propres :

$$\lambda_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^- \quad \lambda_j^+ \geq 0, \lambda_j^- \leq 0 \quad (7.165)$$

On en déduit :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}(\mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^-)\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{D}^+\mathcal{R}^{-1} + \mathcal{R}\mathcal{D}^-\mathcal{R}^{-1} \quad (7.166)$$

soit:

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\mathcal{D}^+\mathcal{R}^{-1} + \mathcal{R}\mathcal{D}^-\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- \quad (7.167)$$

Par suite, si l'on utilise la propriété d'homogénéité dans le cas des équations d'Euler:

$$\mathbf{f} = \mathcal{A}\mathbf{u} = (\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^-)\mathbf{u} = \mathbf{f}^+ + \mathbf{f}^- \quad (7.168)$$

On a :

$$\mathbf{f}^+ = \mathcal{A}^+\mathbf{u}, \mathbf{f}^- = \mathcal{A}^-\mathbf{u} \quad (7.169)$$

On utilise alors un schéma numérique sous forme conservative :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] \quad (7.170)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = \mathbf{F}_j^+ (\mathbf{U}_j^n) + \mathbf{F}_j^- (\mathbf{U}_{j+1}^n) \quad (7.171)$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\mathcal{A}^+\mathbf{U}_j^n + \mathcal{A}^-\mathbf{U}_{j+1}^n) - (\mathcal{A}^+\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathcal{A}^-\mathbf{U}_j^n)] \quad (7.172)$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{A}^+(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) + \mathcal{A}^-(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n)] \quad (7.173)$$

On retrouve le schéma CIR.

7.8.3 Application aux équations d'Euler isotherme

Équations isotherme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (7.174)$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (7.175)$$

et :

$$p = p(\rho) = \rho a^2 \quad (7.176)$$

Formulation de la méthode

La matrice \mathcal{A} est :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (7.177)$$

Les deux valeurs propres sont alors :

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u + a \quad (7.178)$$

La matrice des vecteurs propres droits est :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u - a & u + a \end{bmatrix} \quad (7.179)$$

ainsi que la matrice des vecteurs propres gauches :

$$\mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} u + a & -1 \\ a - u & 1 \end{bmatrix} \quad (7.180)$$

Etant donnée alors une méthode de décomposition donnée avec :

$$\mathcal{D}^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{bmatrix}, \mathcal{D}^- = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{bmatrix} \quad (7.181)$$

On calcule les matrices A^s avec $s = \text{sign}(\lambda_j)$.

$$A^s = \mathcal{R} \mathcal{D}^s \mathcal{R}^{-1} \quad (7.182)$$

On a :

$$A^s = \begin{bmatrix} \lambda_1^s(u + a) - \lambda_2^s(u - a) & \lambda_2^s - \lambda_1^s \\ (u^2 - a^2)(\lambda_1^s - \lambda_2^s) & \lambda_2^s(u + a) - \lambda_1^s(u - a) \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

On en déduit les flux :

$$\mathbf{F}^s = \frac{\rho}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^s + \lambda_2^s \\ \lambda_1^s(u - a) + \lambda_2^s(u + a) \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

soient :

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\rho}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^+ + \lambda_2^+ \\ \lambda_1^+(u - a) + \lambda_2^+(u + a) \end{bmatrix} \quad (7.185)$$

$$\mathbf{F}^- = \frac{\rho}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^- + \lambda_2^- \\ \lambda_1^-(u - a) + \lambda_2^-(u + a) \end{bmatrix} \quad (7.186)$$

On applique enfin un schéma numérique sous forme conservative :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] \quad (7.187)$$

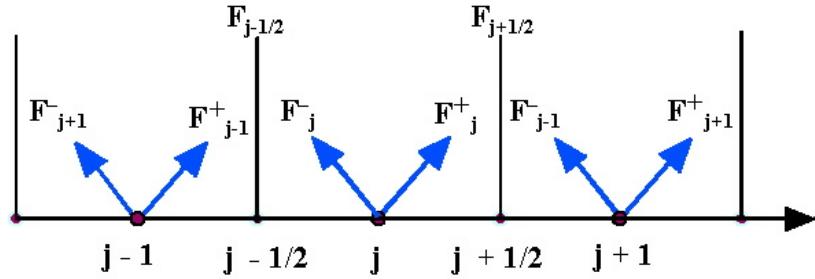


Figure 15 Flux dans les cellules

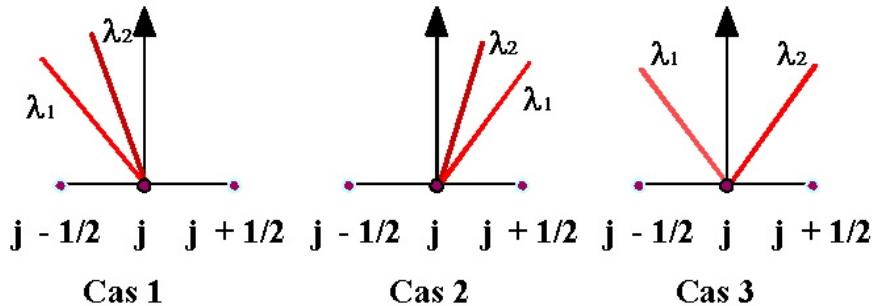


Figure 16 Trois configurations

avec le flux :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = \mathbf{F}_j^+ (\mathbf{U}_j^n) + \mathbf{F}_{j+1}^- (\mathbf{U}_{j+1}^n) \quad (7.188)$$

défini sur la figure 15. Pour le problème traité, trois configurations sont possibles (figure 16):

- Cas 1) Ecoulement supersonique amont: $\lambda_2 = u_j^n + a_j^n \leq 0$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^+ = 0, \lambda_1^- = \lambda_1 = U_j^n - a_j^n \\ \lambda_2^+ = 0, \lambda_2^- = \lambda_2 = U_j^n + a_j^n \\ \mathbf{F}_j^+ = 0, \mathbf{F}_j^- = \mathbf{F}_j^n \end{array} \right\} \quad (7.189)$$

- Cas 2) Ecoulement supersonique aval: $\lambda_1 = u_j^n - a_j^n \geq 0$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^+ = \lambda_1 = U_j^n - a_j^n, \lambda_1^- = 0 \\ \lambda_2^+ = \lambda_2 = U_j^n + a_j^n, \lambda_2^- = 0 \\ \mathbf{F}_j^+ = \mathbf{F}_j^n, \mathbf{F}_j^- = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (7.190)$$

- Cas 3) Ecoulement subsonique aval: $\lambda_1 = u_j^n - a_j^n \leq 0 \leq \lambda_2 = u_j^n + a_j^n$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^+ = 0, \lambda_1^- = \lambda_1 = U_j^n - a_j^n \\ \lambda_2^+ = \lambda_2 = U_j^n + a_j^n, \lambda_2^- = 0 \end{array} \right\} \quad (7.191)$$

et :

$$\mathbf{F}_j^+ = \frac{\rho_j^n}{2} \begin{bmatrix} U_j^n + a_j^n \\ (U_j^n + a_j^n)^2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_j^- = \frac{\rho_j^n}{2} \begin{bmatrix} U_j^n - a_j^n \\ (U_j^n - a_j^n)^2 \end{bmatrix} \quad (7.192)$$

7.9 Le problème de Riemann et le solveur de Roe

Les principes de base de la méthode de Riemann ont été présentés dans le chapitre 4 de ces notes.

7.9.1 Le problème de Riemann et le flux de Godunov

Soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} &= 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}^o(x) \\ \mathbf{u}(0, t) &= \mathbf{u}_l(x), \mathbf{u}(L, t) = \mathbf{u}_r(x) \end{aligned} \quad (7.193)$$

dans une domaine $x_l \leq x \leq x_r$, en utilisant la formulation conservative :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j-1/2}^n - \mathbf{F}_{j+1/2}^n] \quad (7.194)$$

On introduit le flux de Godunov :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1/2}(0)) \quad (7.195)$$

pour lequel la valeur $\mathbf{U}_{j+1/2}(0)$ est la solution exacte $\mathbf{U}_{j+1/2}(x/t)$ évaluée en $x/t = 0$ du problème de Riemann :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (7.196)$$

avec :

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.197)$$

Le but est maintenant de trouver une approximation directe du flux $\mathbf{F}_{j+1/2}$.

7.9.2 Le problème de Riemann et les relations intégrales

Considérons la figure 17 pour laquelle la structure de la solution exacte du problème de Riemann apparaît dans le domaine $[x_L, x_R] \times [0, T]$ soit :

$$x_L \leq TV_L, x_R \leq TV_R \quad (7.198)$$

où V_L et V_R sont les vitesses les plus rapides des signaux perturbant les valeurs initiales \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R . La formulation intégrale de 7.196 peut s'écrire :

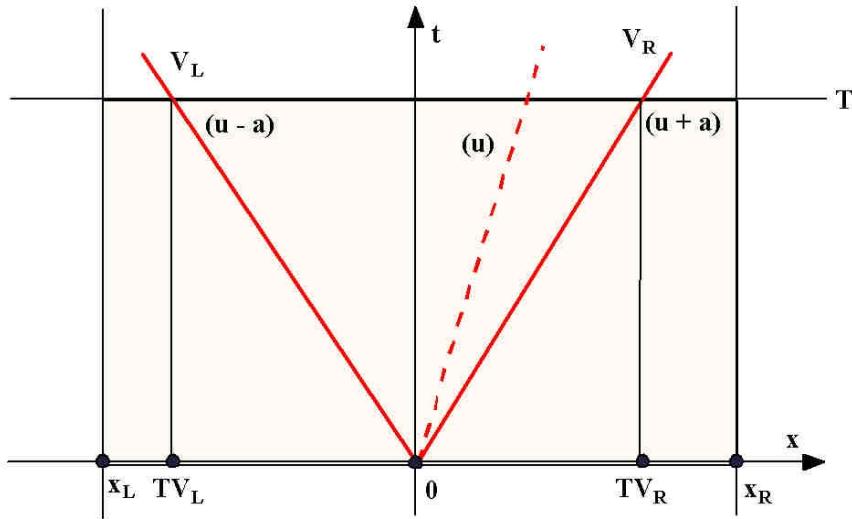


Figure 17 Domaine de calcul

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, 0) dx + \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_L, t)) dt - \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_R, t)) dt \quad (7.199)$$

L'évaluation du membre de droite donne :

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, T) dx = x_R \mathbf{U}_R - x_L \mathbf{U}_L + T (\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R) \quad (7.200)$$

On évalue alors l'intégrale de x_L à 0 :

$$\int_{x_L}^0 \mathbf{u}(x, T) dx = \int_{TV_L}^0 \mathbf{u}(x, T) dx = -TV_L \mathbf{U}_L + T (\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_{0,L}) \quad (7.201)$$

puis, on évalue l'intégrale de 0 à x_R :

$$\int_0^{x_R} \mathbf{u}(x, T) dx = \int_0^{TV_R} \mathbf{u}(x, T) dx = TV_R \mathbf{U}_R - T (\mathbf{F}_{0,R} - \mathbf{F}_R) \quad (7.202)$$

On évalue alors $\mathbf{F}_{0,L}$ et $\mathbf{F}_{0,R}$:

$$\mathbf{F}_{0,L} = \mathbf{F}_L - V_L \mathbf{U}_L - \frac{1}{T} \int_{TV_L}^0 \mathbf{u}(x, T) dx \quad (7.203)$$

et :

$$\mathbf{F}_{0,R} = \mathbf{F}_R - V_R \mathbf{U}_R + \frac{1}{T} \int_0^{TV_R} \mathbf{u}(x, T) dx \quad (7.204)$$

et l'on vérifie que :

$$\mathbf{F}_{0,L} = \mathbf{F}_{0,R} \quad (7.205)$$

condition qui s'appelle *condition de consistance*.

7.9.3 Les approximations des lois de conservations

Considérons l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (7.206)$$

L'idée générale est de déterminer la solution approchée \mathbf{U} en résolvant un système à coefficients constants. Ainsi en introduisant la matrice jacobienne :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (7.207)$$

l'équation de conservation 7.206 prend la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (7.208)$$

Roe cherche une approximation en remplaçant la matrice jacobienne $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ par une matrice moyenne \mathcal{A}' fonction des états \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}'(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \quad (7.209)$$

L'équation originale 7.206 est alors remplacée par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (7.210)$$

avec :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (7.211)$$

Ce système est alors résolu exactement. Pour un problème général avec m lois de conservation, les propriétés de la matrice de Roe \mathcal{A}' sont les suivantes:

- Propriété A : Hyperbolicité du système.

La matrice \mathcal{A}' doit avoir m valeurs propres $\bar{\lambda}_j(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ réelles telles que :

$$\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_m \quad (7.212)$$

et un ensemble complet de vecteurs propres droits indépendants :

$$\bar{\nu}^{(1)}, \bar{\nu}^{(2)}, \dots \bar{\nu}^{(m)} \quad (7.213)$$

- Propriété B : Consistance

$$\mathcal{A}'(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathcal{A}(\mathbf{U}) \quad (7.214)$$

- Propriété C : Conservation à travers les discontinuités

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathcal{A}'(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (7.215)$$

En fait, la solution consiste en m ondes linéaires séparant $m + 1$ états; on cherche le flux correspondant à l'état en $x = 0$ pour $t > 0$. Dans les zones perturbées par les ondes, le flux physique doit être considéré comme une fonction linéaire de U . Si la solution de Riemann approximée est notée par $\mathbf{W}(x/t, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ on a :

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}(x/t, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathcal{A}'(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)(\mathbf{W}(x/t, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) - \mathbf{U}_L) \quad (7.216)$$

Si alors on prend x/t suffisamment grand pour que $\mathbf{W} = \mathbf{U}_R$ on obtient :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathcal{A}'(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (7.217)$$

7.9.4 L'approximation du problème de Riemann

Calcul des variables

Supposons que la matrice $\mathcal{A}'(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ et ses vecteurs $\bar{\nu}^{(j)}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ et ses valeurs propres $\bar{\lambda}_j(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ soient calculées. A titre d'exemple, on traitera au paragraphe suivant le cas des équations d'Euler isotherme. On doit alors résoudre le problème de Riemann. En projetant le saut :

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L \quad (7.218)$$

sur les vecteurs propres droits, on a :

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{j=1}^{j=m} \bar{\alpha}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.219)$$

d'où l'on déduit l'intensité $\bar{\alpha}_j$ des ondes :

$$\bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \quad (7.220)$$

La solution $\mathbf{U}_{j+1/2}(x/t)$ évaluée le long de l'axe t pour $x/t = 0$ sur l'interface $j + 1/2$ est alors donnée par :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \mathbf{U}_L + \sum_{\bar{\lambda}_j \leq 0}^{j=m} \bar{\alpha}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.221)$$

ou :

$$\mathbf{U}_{j+1/2}(0) = \mathbf{U}_R - \sum_{\bar{\lambda}_j \geq 0}^{j=m} \bar{\alpha}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.222)$$

Calcul des flux

Maintenant, il ne faut pas oublier qu'en fait on a résolu le système suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}'(\mathbf{u}')}{\partial x} = 0 \quad (7.223)$$

avec :

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}') = \mathcal{A}'\mathbf{u}' \quad (7.224)$$

et que l'on n'a pas :

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathcal{A}'\mathbf{U}'_{j+1/2}(0) \quad (7.225)$$

Pour obtenir le flux correct, il faut utiliser les relations 7.203 et 7.204:

$$\mathbf{F}_{0,L} = \mathbf{F}_L - V_L \mathbf{U}_L - \frac{1}{T} \int_{TV_L}^0 \mathbf{u}(x, T) dx \quad (7.226)$$

et :

$$\mathbf{F}_{0,R} = \mathbf{F}_R - V_R \mathbf{U}_R + \frac{1}{T} \int_0^{TV_R} \mathbf{u}(x, T) dx \quad (7.227)$$

qui conduisent à la condition de consistance sur l'interface :

$$\mathbf{F}_{0,L} = \mathbf{F}_{0,R} \quad (7.228)$$

Si $\mathbf{U}'_{j+1/2}(x, t)$ est la solution de l'équation modifiée 7.224 avec les données \mathbf{U}_R et \mathbf{U}_L , on a avec 7.201 et 7.201:

$$\int_{TV_L}^0 \mathbf{U}'_{j+1/2}(x, T) dx = -TV_L \mathbf{U}_L + T(\mathbf{F}'(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}'(\mathbf{U}'_{j+1/2}(0))) \quad (7.229)$$

et:

$$\int_0^{TV_R} \mathbf{U}'_{j+1/2}(x, T) dx = TV_R \mathbf{U}_R + T(\mathbf{F}'(\mathbf{U}'_{j+1/2}(0)) - \mathbf{F}'(\mathbf{U}_R)) \quad (7.230)$$

La substitution de 7.229 et 7.230 dans 7.226 et 7.227 donne :

$$\mathbf{F}_{0,L} = \mathbf{F}'(\mathbf{U}'_{j+1/2}(0)) + \mathbf{F}_L(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}'(\mathbf{U}_L) \quad (7.231)$$

et :

$$\mathbf{F}_{0,R} = \mathbf{F}'(\mathbf{U}'_{j+1/2}(0)) + \mathbf{F}_L(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}'(\mathbf{U}_R) \quad (7.232)$$

En utilisant 7.221 ou 7.222 et la définition du flux $\mathbf{F}' = \mathcal{A}'\mathbf{U}'$, les flux numériques s'expriment alors par :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \mathbf{F}_L + \sum_{\bar{\lambda}_j \leq 0}^{j=m} \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.233)$$

ou :

$$\mathbf{F}_{j+1/2}(0) = \mathbf{F}_R - \sum_{\bar{\lambda}_j \geq 0}^{j=m} \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.234)$$

7.9.5 La méthode originale de Roe

Nous allons appliquer la méthode de Roe pour la recherche de la matrice \mathcal{A}' , de ces valeurs propres et de ses vecteurs propres ainsi que des coefficients $\bar{\alpha}_j$, pour les équations isothermes.

Équations isothermes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (7.235)$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (7.236)$$

et :

$$p = p(\rho) = \rho a^2 \quad (7.237)$$

La matrice \mathcal{A} et ses propriétés

La matrice \mathcal{A} est :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (7.238)$$

Les deux valeurs propres sont alors:

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u + a \quad (7.239)$$

La matrice des vecteurs propres droits est:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u - a & u + a \end{bmatrix} \quad (7.240)$$

Le principe de la méthode de Roe

On choisit le nouveau vecteur \mathbf{Z} tel que :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\rho}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (7.241)$$

Par suite \mathbf{u} et \mathbf{f} peuvent s'exprimer en fonction des composantes de \mathbf{Z} .

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = z_1 \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \end{bmatrix} \quad (7.242)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 + a^2 z_1^2 \end{bmatrix} \quad (7.243)$$

On cherche alors un vecteur $\bar{\mathbf{Z}}$ moyen, obtenue en effectuant la moyenne arithmétique suivante :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (7.244)$$

La raison de ce changement de variable est que les vecteurs $\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L$ et $\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L$ peuvent être exprimés sous forme de matrices multipliées par $\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_L$. En effet :

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} (\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_L) = \mathcal{B}' (\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_L) \quad (7.245)$$

et :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) = \begin{bmatrix} \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \\ 2a^2 \bar{z}_1^2 & 2\bar{z}_2^2 \end{bmatrix} (\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_L) = \mathcal{C}' (\mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_L) \quad (7.246)$$

En notant par $[.]$ le saut de la quantité, on a :

$$[\mathbf{u}] = \mathcal{B}' [\mathbf{Z}] \quad (7.247)$$

et :

$$[\mathbf{f}] = \mathcal{C}' [\mathbf{Z}] \quad (7.248)$$

d'où pour les valeurs discrètes :

$$[\mathbf{F}] = \mathcal{C} \mathcal{B}'^{-1} [\mathbf{U}] \quad (7.249)$$

La condition 7.215 est alors satisfaite si l'on prend comme matrice \mathcal{A}' :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{C} \mathcal{B}'^{-1} \quad (7.250)$$

soit :

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \bar{z}_2^2/\bar{z}_1^2 & 2\bar{z}_2/\bar{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \bar{v}^2 & 2\bar{v} \end{bmatrix} \quad (7.251)$$

où l'on a défini la vitesse moyennée :

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (7.252)$$

Ayant trouvé la matrice \mathcal{A}' , on en déduit les valeurs propres $\bar{\lambda}_j$ qui sont réelles et les vecteurs propres $\bar{\nu}^{(j)}$ qui sont linéairement indépendants:

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} - a \\ \bar{u} + a \end{bmatrix} \quad (7.253)$$

et :

$$\bar{\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} - a \end{bmatrix} \quad (7.254)$$

$$\bar{\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} + a \end{bmatrix} \quad (7.255)$$

Par conséquent la condition A est vérifiée. On peut alors calculer l'intensité des ondes:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_R - \rho_L \\ \rho_R u_R - \rho_L u_L \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{j=2} \bar{\alpha}_j \bar{\nu}^{(j)} \quad (7.256)$$

avec :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\Delta u_1 (\bar{u} + a) - \Delta u_2}{2a}, \bar{\alpha}_2 = \frac{-\Delta u_1 (\bar{u} - a) + \Delta u_2}{2a} \quad (7.257)$$

Chapter 8

LA VISCOSITÉ ARTIFICIELLE

On a vu que les schémas linéaires du second ordre généraient toujours des oscillations. Un moyen simple pour réduire l'amplitude de ces oscillations est d'ajouter des termes du second et/ou du quatrième ordre. En général, les coefficients de ces termes doivent être fixés par l'utilisateur et sont constant partout. L'introduction de ces termes supplémentaires est simple. La difficulté réside dans le choix du coefficient. Il est possible de déterminer les limites du paramètre par une analyse de stabilité du schéma utilisé. Cependant cette valeur limite dépend du problème à résoudre. Il faut donc faire très attention dans la détermination de ces paramètres surtout lorsque le problème physique à résoudre est de type fluide visqueux.

8.1 Introduction

Un terme de dissipation artificielle du second ordre aura la forme suivante:

$$D_{(1)} = \varepsilon (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.1)$$

soit :

$$D_{(1)j} = \varepsilon_j (U_{j+1} - 2U_j - U_{j-1}) \quad (8.2)$$

ou :

$$D_{(1)j+1/2} = \varepsilon_{j+1/2} (U_{j+1} - U_j) \quad (8.3)$$

et un terme du quatrième ordre :

$$D_{(2)} = \varepsilon (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (8.4)$$

soit :

$$D_{(2)j} = -\varepsilon_j (U_{j-2} - 4U_{j-1} + 6U_j - 4U_{j+1} + U_{j+2}) \quad (8.5)$$

ou :

$$D_{(2)j+1/2} = -\varepsilon_{j+1/2} (U_{j+2} - 3U_{j+1} + 3U_j - U_{j-1}) \quad (8.6)$$

Nous donnons quelques exemples de viscosités numériques utilisées, en particulier dans le code Euler-1D.

8.2 MacCormack et Baldwin

Cette viscosité artificielle est obtenue de la manière suivante :

$$D_{(1)j+1/2} = \varepsilon_{j+1/2} (U_{j+1} - U_j) \quad (8.7)$$

avec :

$$\varepsilon_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}) \quad (8.8)$$

ou :

$$\varepsilon_j = \alpha (|u| + a_j) \frac{p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}}{p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}} \quad (8.9)$$

où α peut varier ($\alpha = 0.25$)

8.3 Jameson

Cette viscosité artificielle est obtenue en combinant la viscosité artificielle de MacCormack et Baldwin avec une terme supplémentaire du quatrième ordre :

$$D_{(1+2)j+1/2} = \varepsilon_{j+1/2} (U_{j+1} - U_j) - \varepsilon_{j+1/2}^* (U_{j+2} - 3U_{j+1} + 3U_j - U_{j-1}) \quad (8.10)$$

avec :

$$\varepsilon_{j+1/2}^* = \max [0, (\alpha^* - \varepsilon_{j+1/2})] \quad (8.11)$$

où α^* est un paramètre dont la valeur typique est $\alpha^* = 1/256$. A titre d'exemple, l'adjonction de cette viscosité pour le schéma de MacCormack appliqué à un écoulement supersonique-subsonique dans une tuyère donne comme résultat (figure 1):

8.4 Von Neumann-Richtmyer

Cette viscosité artificielle s'écrit :

$$D_{(1)j+1/2} = \alpha \rho_{j+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{bmatrix}_{j+1/2} |U_{j+1} - U_j| (U_{j+1} - U_j) \quad (8.12)$$

avec :

$$\alpha \simeq 1 \quad (8.13)$$

La figure 2 montre l'effet de cette viscosité artificielle.

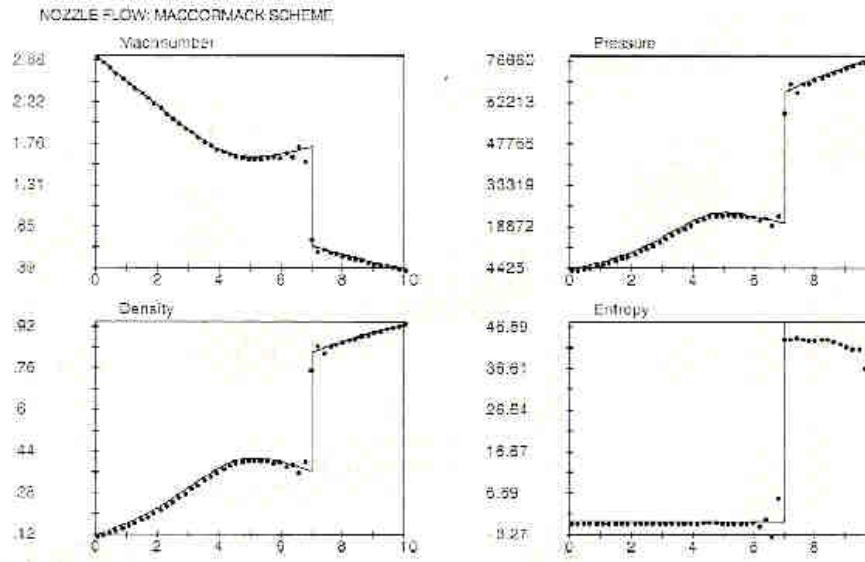


Figure 1 Viscosité artificielle de Jameson

8.5 Landshoff

Cette viscosité artificielle s'écrit :

$$D_{(1)j+1/2} = \alpha (\rho a)_{j+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{bmatrix}_{j+1/2} (U_{j+1} - U_j) \quad (8.14)$$

avec :

$$0 \leq \alpha \leq 0.5 \quad (8.15)$$

La figure 3 montre l'effet de cette viscosité artificielle.

8.6 Tyler & Ellis

Cette viscosité artificielle s'écrit :

$$D_{(1)j+1/2} = \alpha \rho_{j+1/2} (|u| + a)_{j+1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{bmatrix}_{j+1/2} (U_{j+1} - U_j) \quad (8.16)$$

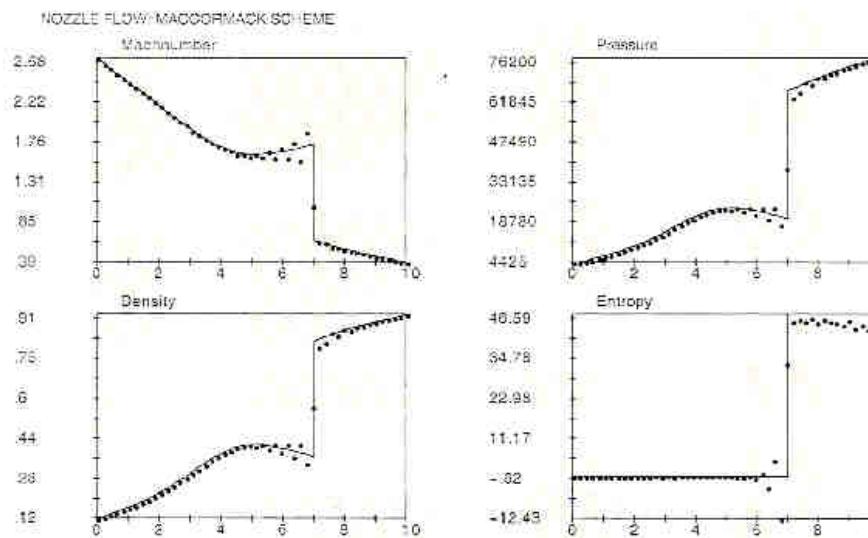


Figure 2 Viscosité artificielle de Von Neumann-Richtmyer

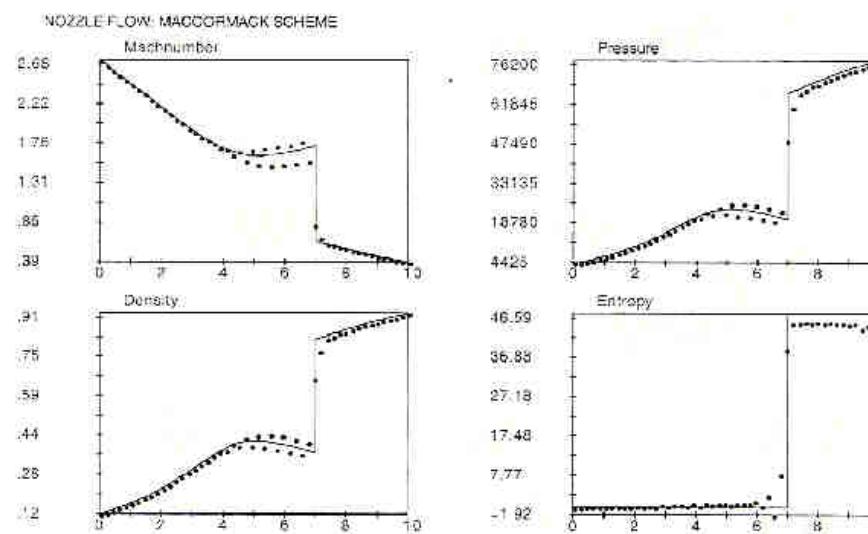


Figure 3 Viscosité artificielle de Landshoff

Chapter 9

LES SCHÉMAS FCT (FLUX-CORRECTED TRANSPORT)

L’addition de terme d’amortissement a été proposé au chapitre précédent afin d’éliminer ou d’atténuer les oscillations au voisinage de fort gradients. Une extension de cette approche a été effectuée en rajoutant un second terme. Cette modification est appliquée sur des schémas de type prédicteur-correcteur. On ajoute un certain amortissement (terme dissipatif) à la partie prédicteur du schéma et on enlève une partie de cette amortissement (terme anti-dissipatif) au terme correctif du schéma. Un tel schéma est appelé schéma FCT (Flux-Corrected Transport).

9.1 Principe

On part du **schéma q** :

$$U_j^* = U_j^n - \frac{c}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{q}{2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (9.1)$$

avec comme exemple, le schéma de Lax-Wendroff ($q = c^2$) :

$$U_j^* = U_j^n - \frac{c}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{c^2}{2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (9.2)$$

On ajoute le terme de dissipation du second ordre de la forme :

$$D = \varepsilon_1 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (9.3)$$

On obtient :

$$U_j^* = U_j^n - \frac{c}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \left(\varepsilon_1 + \frac{q}{2} \right) (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (9.4)$$

On rajoute alors un pas de correction ou on inclut un terme anti-dissipatif :

$$U_j^{n+1} = U_j^* - \varepsilon_2 (U_{j+1}^* - 2U_j^* + U_{j-1}^*) \quad (9.5)$$

Les valeurs de ε_1 et de ε_2 sont choisies selon les schémas. Ainsi avec un schéma de Lax-Wendroff appliqué pour l’équation de continuité on peut choisir :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{6} (1 + 2c^2) \quad (9.6)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{6} (1 - c^2) \quad (9.7)$$

Par ailleurs, pour préserver la forme conservative des équations et dans le cas général d'un problème non linéaire, on applique le terme antidiffusif au points 1/2 :

$$U_j^{n+1} = U_j^* - (\bar{U}_{j+1/2} - \bar{U}_{j-1/2}) \quad (9.8)$$

avec :

$$\bar{U}_{j+1/2} = \varepsilon_2 (U_{j+1}^* - U_j^*) \quad (9.9)$$

$$\bar{U}_{j-1/2} = \varepsilon_2 (U_j^* - U_{j-1}^*) \quad (9.10)$$

Part III

Les schémas monotones d'ordre supérieur

Ce titre semble être contradictoire. En effet, l'étude de la monotonicité a montré que les schémas ayant cette propriété étaient au plus du premier ordre. Par ailleurs les schémas (linéaires) d'ordre supérieur ou égal à deux sont oscillants, même si l'on peut atténuer plus ou moins fortement ces oscillations par l'introduction de viscosités artificielles. Cette contradiction est apparente. L'introduction de méthodes TVD (Total Variation Diminishing) va permettre de lever la contradiction.

Chapter 10

LES SCHÉMAS CONSERVATIFS MONOTONES NON OSCILLANTS

10.1 Principe

Nous avons montré au chapitre II que les oscillations *semblaient* être inévitables pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à 2. Nous allons maintenant montrer comment il est pourtant possible de les éviter. On cherche maintenant à construire des schémas du *second ordre non linéaires et non oscillants du second ordre à partir de schémas-q mais sous forme conservative* appliquée à l'équation de convection scalaire. On considère la possibilité d'un schéma intermédiaire entre le schéma décentré (du premier ordre et trop diffusif) et le schéma de Lax-Wendroff (du second ordre et oscillant) avec la propriété d'être conservatif. Si $0 \leq c \leq 1$, le flux numérique sur l'interface $j + 1/2$ est :

- Pour le schéma upwind :

$$F_{j+1/2} = aU_j \quad (10.1)$$

- Pour le schéma de Lax-Wendroff :

$$F_{j+1/2} = \frac{a}{2}(1+c)U_j + \frac{a}{2}(1-c)U_{j+1} \quad (10.2)$$

- On réécrit alors 10.2 sous la forme :

$$F_{j+1/2} = a(U_j + \frac{1}{2}(1-c)(U_{j+1} - U_j)) \quad (10.3)$$

- Enfin, on modifie le flux numérique en remplaçant $\Delta_j = (U_{j+1} - U_j)$ par $\Delta_{j,mono}$:

$$F_{j+1/2} = a\{U_j^n + \frac{1}{2}(1-c)\Delta_{j,mono}\} \quad (10.4)$$

Le gradient $\Delta_j = U_{j+1} - U_j$ est remplacé par $\Delta_{j,mono}$ nouveau gradient **qui est construit de manière à limiter les oscillations** qui sont générées par le schéma de Lax-Wendroff.

10.2 Schéma du premier ordre optimal

On cherche tout d'abord à construire des schémas monotones et conservatifs à partir de schémas du premier ordre *non oscillants* et dont l'erreur de troncature soit la plus faible. Le théorème de Godunov a été appliqué pour les schémas qui ont la forme suivante :

$$U_j^{n+1} = \sum c_k U_{j+k}^n \quad (10.5)$$

Ce schéma inclue toutes les opérations linéaires pour obtenir U^{n+1} à partir de U^n . Par une opération linéaire, on indique un procédé $M\{U\}$ tel que :

$$a) M\{U + V\} = M\{U\} + M\{V\} \quad (10.6)$$

$$b) M\{kU\} = kM\{U\} \quad (10.7)$$

Nous avons introduit le théorème de Godunov, précisant qu'un *schéma linéaire* d'ordre deux (ou supérieur) pour l'équation de conservation scalaire ne pouvait préserver la monotonicité des distributions des données initiales convectées. Il y a pourtant un moyen, si l'on réalise que ce résultat s'applique à tous les schémas linéaires pour l'équation de convection linéaire. En effet, on peut se demander si *des schémas de discrétisations non-linéaires* appliqués à l'équation de convection linéaire, peuvent préserver cette propriété de monotonicité pour des schémas d'ordre supérieur ou égal à deux. Comme, par ailleurs les équations d'Euler pour lesquelles ces schémas seront appliquées sont, de fait, non-linéaires, cette idée paraît raisonnable. Ainsi pour se libérer des contraintes du théorème de Godunov, il faut abandonner l'une des conditions précédentes 10.6 et 10.7. En fait, c'est la condition 10.6 qu'il faut abandonner. L'approche la plus ancienne consiste à ajouter au schéma numérique des termes de viscosité artificielle qui ont des effets d'amortissement. Cependant, il serait préférable d'avoir des schémas qui ne dépendent pas d'expériences comme c'est le cas avec cette approche. Il faudrait par ailleurs qu'ils ne génèrent aucune oscillation. De tels schémas existent mais sont, en général, plus coûteux en temps. Or, l'étude de la méthode de Godunov pour la construction d'un schéma conservatif et monotone nous a conduit à un schéma particulier, le schéma *C.I.R.* On peut alors se demander quel est le schéma du premier ordre qui a l'erreur de troncature la plus faible et qui est de la forme 10.5. Si l'on substitue le développement en série de Taylor de la solution exacte de $u_{,t} + f_{,x} = 0$ dans 10.5, on a :

$$\epsilon = [\sum b_k k^2 - c^2] u_{xx} \Delta x \quad (10.8)$$

Le problème algébrique qui doit être résolu, est de trouver un ensemble de coefficients $\{b_k\}$ tels que :

$$b_k \geq 0, \forall k \quad (10.9)$$

$$[\sum b_k] = 1 \quad (10.10)$$

$$[\sum b_k k^2] = -c \quad (10.11)$$

et que :

$$|\sum b_k k^2 - c^2| \text{ soit minimal} \quad (10.12)$$

On peut montrer que la solution à ce problème dépend du signe de c . Si $0 \leq c \leq 1$, le schéma optimal préservant la monotonicité est :

$$U_j^{n+1} = (1 - c)U_j^n + U_{j-1}^n \quad (10.13)$$

Si $-1 \leq c \leq 0$, le schéma optimal est :

$$U_j^{n+1} = (1 + c)U_j^n - U_{j+1}^n \quad (10.14)$$

Ce schéma de type décentré est le *schéma C.I.R.*. Ce schéma est autodissipatif, puisque, en effet, il peut s'écrire sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.15)$$

ou :

$$\frac{c}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.16)$$

représente le terme de dissipation. Sous forme conservative, il vient :

$$F_{j+1/2}^n = aU_j^n = \frac{1}{2}a(U_{j+1}^n + U_j^n) + \frac{a}{2}(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (10.17)$$

et puisque :

$$f_{j+1}^n = aU_{j+1}^n \quad (10.18)$$

on a :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) + \frac{a}{2}(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (10.19)$$

10.3 Construction d'un schéma du second ordre monotone

On cherche ensuite à construire des schémas du second ordre à partir de *schémas-q*, dont le schéma *C.I.R.* est un cas particulier, en les rendant non linéaires. Cette approche nous permettra de comprendre le principe de la création de schémas non linéaires.

10.3.1 Schémas - q et contrôleur de régularité

Le théorème de Godunov a été introduit en l'appliquant sur le schéma classique de Lax-Wendroff, qui est l'un des schémas les plus précis du second ordre parmi les schémas-q. Par ailleurs, le schéma *C.I.R.* est du premier ordre. La première généralisation consiste à introduire une version modifiée du schéma-q en remplaçant la variable q par une fonction non linéaire. Considérons l'algorithme suivant :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{q}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.20)$$

où c est le nombre de Courant $c = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Introduisons les notations classiques suivantes :

$$\Delta^+ U_j^n = U_{j+1}^n - U_j^n \quad (10.21)$$

$$\Delta^- U_j^n = U_j^n - U_{j-1}^n \quad (10.22)$$

et définissons le *contrôleur de régularité* θ_j^n , et son inverse R_j tels que :

$$\theta_j = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n} = \frac{\Delta^+ U_j^n}{\Delta^- U_j^n} \quad (10.23)$$

et:

$$R_j = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{U_{j+1}^n - U_j^n} = \frac{\Delta^- U_j^n}{\Delta^+ U_j^n} \quad (10.24)$$

Le schéma de Lax-Wendroff modifié (schéma q), inclue maintenant la variable $q(\theta)$; l'introduction d'une fonction $q_j^n(\theta_j)$ rend le schéma non linéaire. On a alors:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{q_j^n(\theta)}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.25)$$

Pour $c > 0$, on définit la fonction $[q_{mono}]_j^n$ pour rendre le schéma monotone :

$$[q_{mono}]_j^n = c^2 + c(1 - c)S(\theta_j^n) \quad (10.26)$$

avec :

$$S(\theta_j^n) = 0; \text{ si } |\theta_j^n - 1| \leq 2 \text{ et } 1 - \frac{2}{|\theta_j^n - 1|}, \text{ si } |\theta_j^n - 1| > 2 \quad (10.27)$$

où $S(q)$ peut **aussi** être considérer comme une fonction "bascule" permettant de passer aux deux schémas extrêmes *L.W.* ($S = 0$) et *C.I.R* ($S = 1$).

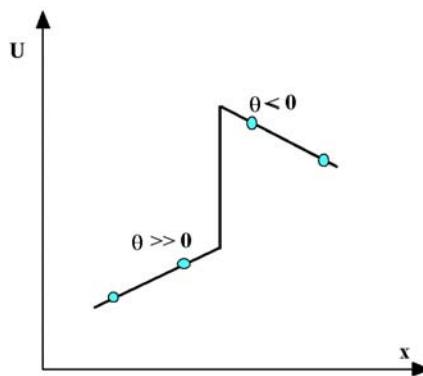


Figure 1 Saut

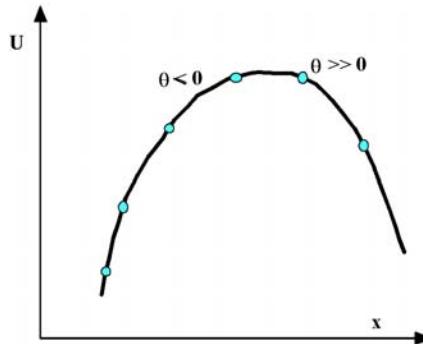


Figure 2 Extremum

Le schéma précédent a cependant deux défauts :

1) Premier défaut : le contrôleur de régularité ne fait pas la différence entre la base ou le sommet d'une structure locale de type saut (figure 1) et les cotés d'un extrémum dans une solution régulière (figure 2).

Afin de distinguer les deux configurations, il est nécessaire de comparer *deux* valeurs du contrôleur : a) une grande valeur suivie d'une petite valeur caractérise un saut, b) une petite valeur suivie d'une grande valeur caractérise un extrémum. En d'autre termes, un saut est une grande différence entourée par deux valeurs faibles du contrôleur, tandis qu'un extrémum doit montrer une petite différence entourée par deux grandes valeurs du contrôleur. Cette information doit être fournie par la fonction de flux numérique qui, par suite, doit dépendre d'au moins 4 arguments. Par conséquent, les schémas incorporant une telle forme de flux doivent dépendre au moins de cinq arguments. On remarquera que la plupart des schémas sont basés sur trois arguments. La conséquence est que les extrema pour des distributions régulières, calculés par des schémas en trois points, sont aplatis. Cette imprécision conduit à la question de savoir, dans quel sens le schéma de *L.W. – modifié* (par les valeurs locale de *q*) peut être considéré comme étant du second ordre.

2) Deuxième défaut : ce schéma n'est pas conservatif : en effet, la fonction de maillage θ_j^n utilisent les trois valeurs U_{j+1}^n , U_j^n , U_{j-1}^n tandis que la formulation conservatrice pour un schéma-*q* est basé sur une fonction de flux numérique qui n'a que deux arguments:

$$U_{j+1}^n = U_j^n - \lambda [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)] \quad (10.28)$$

Or, afin de construire un schéma préservant la monotonicité et étant conservatif, le flux numérique doit avoir au moins 3 arguments : par exemple :

$$F_j^n = F(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \quad (10.29)$$

10.3.2 Le contrôleur de régularité

On précise certaines propriétés du contrôleur de régularité, fonction essentielle dans la construction des schémas non-oscillants. Supposons que la distribution convectée soit régulière. Définissons le contrôleur de régularité par :

$$\theta(x) = \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{U(x) - U(x - \Delta x)} \quad (10.30)$$

D'après les figures 3 et 4; il est évident que $\theta(x)$ tend vers 1 presque partout et $S(\theta(x)) = 0$. En effet, on remarque que pratiquement dans tout l'écoulement, on

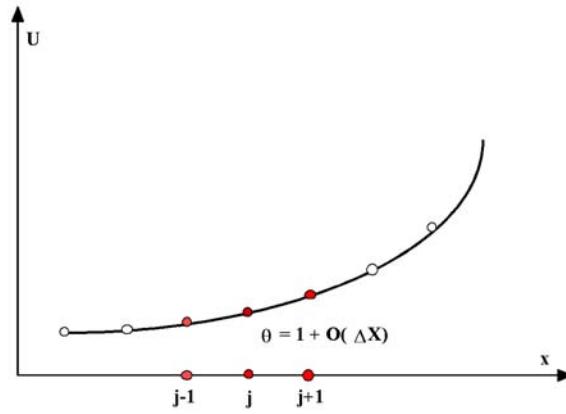


Figure 3 Courbe continu

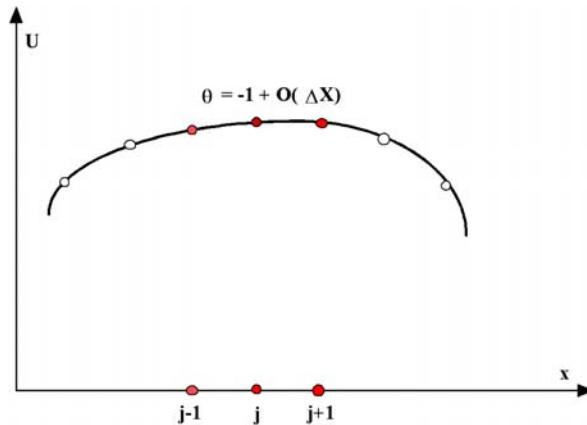


Figure 4 Maxima/minima

doit s'attendre à ce que $\theta(x)$ soit proche de 1. Effectuons un développement limité en série de Taylor de $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{\Delta x U' + 1/2(\Delta x)^2 U''}{\Delta x U' - 1/2(\Delta x)^2 U''} \quad (10.31)$$

$$\theta(x) = 1 - \Delta x \frac{U''}{U'} \quad (10.32)$$

et l'on voit que dans les régions régulières de l'écoulement $\theta(x)$ ou $R(x)$ est proche de 1, à l'exception des maxima/minima de U' . En chaque point x , le schéma tend vers un schéma de *L.W.* non modifié lorsque Δx tend vers zéro, sauf éventuellement en un point x où $U(x)$ est un extrémum. En un tel point la valeur de $\theta(x)$ tend vers -1 , et de nouveau $S(q) = 0$. Mais pratiquement, l'abscisse de l'extrémum ne sera que très rarement aux points nodaux du maillage et par suite, il y aura toujours un point au voisinage de l'extrémum où $\theta(x) << -1$ ou $\theta(x) >> 3$, permettant alors à la fonction S d'être non nulle. Cela signifie que la convergence uniforme de l'erreur de discréétisation $O(\Delta x)^2$ n'est pas possible, mais que la convergence locale ne devrait pas être affectée. Le point crucial est que le nombre de points, où l'erreur de discréétisation est $O(\Delta x)$, devient de plus en plus petit, relativement au nombre total de points M ($M = 1/\Delta x$) de la grille lorsque Δx tend vers zéro.

10.4 Influence de la forme de la distribution des données initiales

10.4.1 Distribution linéaire par morceaux des données

Si on utilise une distribution linéaire par morceau dans chaque cellule, centrée sur la valeur moyenne à cause de la conservation, **on obtient automatiquement un schéma aux volumes finis du second ordre**. On procède de la manière suivante :

- 1) Approximation par une distribution linéaire (ligne droite) de la distribution initiale (figure 5).
- 2) Distribution des valeurs initiales avant (ligne simple) et après le décalage (ligne pleine) (figure 6).
- 3) Détermination de la nouvelle distribution linéaire (ligne simple) de la distribution convectée (ligne pleine) (figure 7).
- 4) Valeurs initiales pour la prochaine itération (figure 8).

10.4.2 Principe pour préserver la monotonicité

Une condition suffisante pour préserver la monotonicité d'une séquence de moyennes cellulaires est illustrée sur la figure 9: la distribution linéaire dans une cellule ne doit pas prendre de valeur en dehors du domaine défini par les valeur moyennes des cellules adjacentes.

- La pente de la distribution linéaire dans la cellule $j - 1/2, j + 1/2$ est réduite (ligne pleine) de manière à ce que les valeurs dans la cellule ne dépassent pas le niveau moyen des cellules adjacentes (traits tillés),

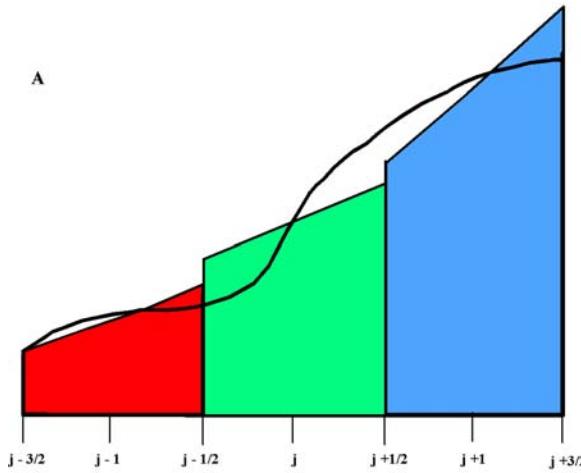


Figure 5 Données initiales

- Si la moyenne sur la cellule atteint un maximum, la pente est réduite à zéro,
- Si la pente ne suit pas l'évolution des cellules adjacentes, elle est aussi réduite à zéro.

10.4.3 Choix dans la détermination des gradients ou de la pente de la distribution linéaire

Dans ce paragraphe nous allons, mettre en place une nouvelle approche essentiellement pour augmenter la précision des méthodes mais à partir de la formulation conservative. Pour cela, on va déterminer la pente (figure 10) d'une distribution linéaire à partir de moyennes pondérées de différences consécutives afin d'obtenir un schéma du second ordre.

Considérons donc une distribution linéaire dans les domaines $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$:

$$u_j(x) = u_j^n + \frac{(x - x_j)}{\Delta x} \Delta_j u_j^n, \quad x \in [0, \Delta x] \quad (10.33)$$

où $\frac{\Delta_j U_j^n}{\Delta x}$ est une pente choisie **judicieusement** de $U_j(x)$ entre x_j et x_{j+1} . La fonction $U_j(x)$ est définie localement dans le domaine $[0, \Delta x]$. Le centre de la cellule x_j est $x = \frac{1}{2}\Delta x$ et $U_j(x_j) = U_j^n$. Aux extrêmes du domaine on a dans un référentiel local :

$$u_j^L = u_j(0) = u_j^n - \frac{1}{2} \Delta_j u_j^n \quad (10.34)$$

$$u_j^R = u_j(\Delta x) = u_j^n + \frac{1}{2} \Delta_j u_j^n \quad (10.35)$$

avec :

$$\Delta_j = \Delta_j u_j^n \quad (10.36)$$

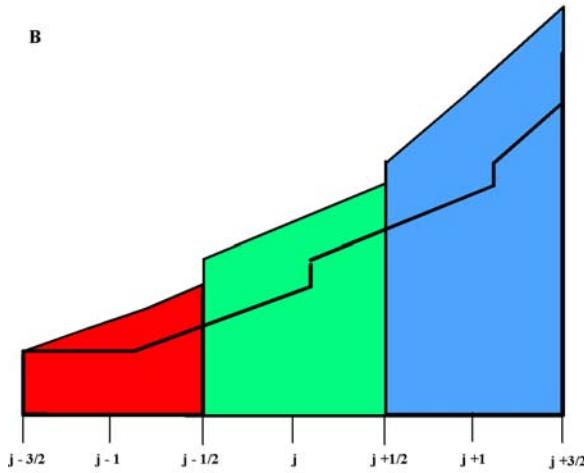


Figure 6 Décalage

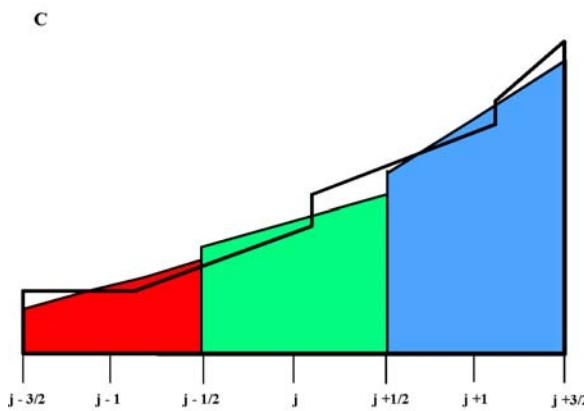


Figure 7 Nouvelle distribution linéaire

Remarque : Si l'on voulait des précisions plus élevées on pourrait introduire une distribution quadratique où κ est un paramètre. :

$$u_j(x) = u_j^n + \frac{(x - x_j)}{\Delta x} \Delta_j + \frac{3\kappa}{2(\Delta x)^2} \left((x - x_j)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right) \Delta_j^{(1)}, \quad x \in [0, \Delta x] \quad (10.37)$$

On détermine alors l'évolution de u_j^L et u_j^R au cours d'un demi-pas de temps :

$$\bar{u}_j^L = u_j^L - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_j^L) - f(u_j^R)] \quad (10.38)$$

$$\bar{u}_j^R = u_j^R - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_j^L) - f(u_j^R)] \quad (10.39)$$

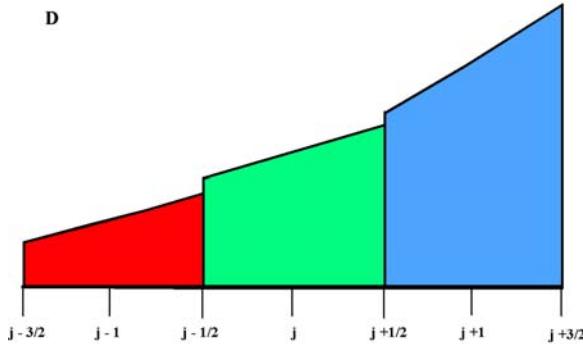


Figure 8 Nouvelles valeurs initiales

Ainsi ayant modifié les données, on est amené à traiter un problème de Riemann à valeurs constantes par morceau suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (10.40)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \bar{u}_j^R, & x < 0 \\ \bar{u}_{j+1}^L, & x > 0 \end{cases} \quad (10.41)$$

On peut choisir la pente $\frac{\Delta_j U_j^n}{\Delta x}$ de la relation 10.33 sous la forme suivante où $\bar{\Delta}_j$ est une moyenne de gradients :

$$\bar{\Delta}_j = \frac{1}{2}(1+k)\Delta_{j-1/2}\bar{U}_j^n + \frac{1}{2}(1-k)\Delta_{j+1/2}\bar{U}_j^n \quad (10.42)$$

où k est un paramètre réel libre défini dans le domaine $[-1, 1]$. La valeur de \bar{U}_j^n représente la moyenne spatiale sur la cellule. Ce qui conduit à une famille de schémas du seconde ordre. Reprenons la relation 10.3 qui conduit à la relation :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{c}{2}(1-c)[(U_{j+1}^n - U_j^n) - (U_j^n - U_{j-1}^n)] \quad (10.43)$$

Le schéma résultant pour l'équation de convection est alors, en remplaçant les gradients suivants $[(U_{j+1}^n - U_j^n), (U_j^n - U_{j-1}^n)]$ par $\bar{\Delta}_j$ et $\bar{\Delta}_{j-1}$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{c}{2}(1-c)[\bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}_{j-1}] \quad \text{si } c \geq 0 (a \geq 0) \quad (10.44)$$

Le flux numérique correspondant est alors :

$$F_{j+1/2} = a\{U_j^n + \frac{1}{2}(1-c)\bar{\Delta}U_j^n\} \quad (10.45)$$

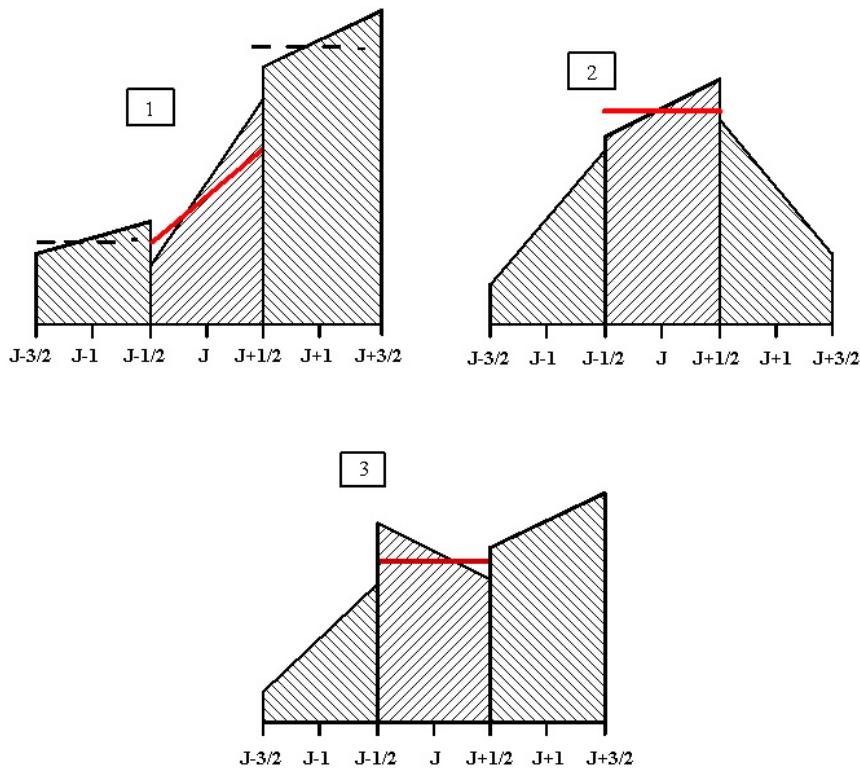


Figure 9 Comment préserver la monotonie

10.4.4 Principe de prévention des oscillations

Nous pouvons montrer maintenant comment des oscillations numériques apparaissent et comment on peut les prévenir. Supposons, par exemple que la valeur minimum (en $i-1/2$) de la distribution linéaire dans une cellule j soit inférieure à la valeur moyenne U_{j-1}^n en $x_{j-1/2}$. Dans le plus mauvais des cas (pour maintenir la monotonie) U est constant pour $x < x_{j-1/2}$ et la distribution dans la cellule j suit un "plateau" au niveau U_{j-1}^n . Maintenant, convectons ces valeurs initiales sur une distance $c\Delta x$ vers la droite (figure 12) avec une valeur de c proche de 1.

On voit que la valeur moyenne dans la cellule j au temps $n+1$ est plus basse que la valeur du plateau sur la gauche : par conséquent, la suite des valeurs moyennes n'est plus monotone. De la même manière, si la distribution dans la cellule j dépasse la valeur moyenne U_{j+1}^n et que la cellule fait partie du plateau pour $x > x_{j+1/2}$, alors une convection avec une faible valeur de c fera augmenter U_{j+1}^n , détruisant la monotonie de la séquence des valeurs moyennes. On doit donc imposer :

$$U_j^n - \frac{1}{2}\bar{\Delta}_j \geq U_{j-1}^n \quad (10.46)$$

$$U_j^n + \frac{1}{2}\bar{\Delta}_j \leq U_{j+1}^n \quad (10.47)$$

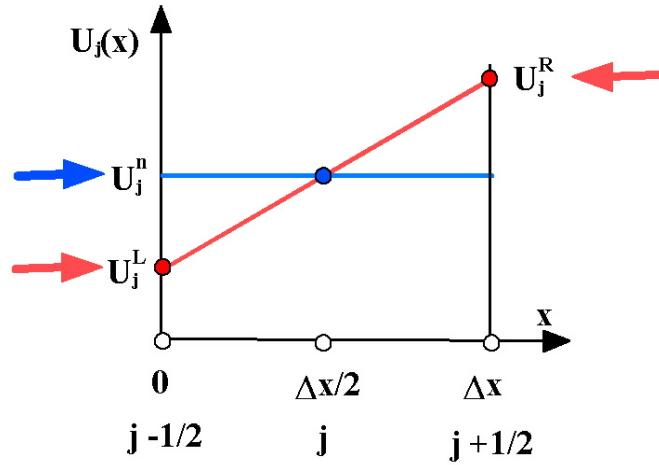


Figure 10 Choix de la pente

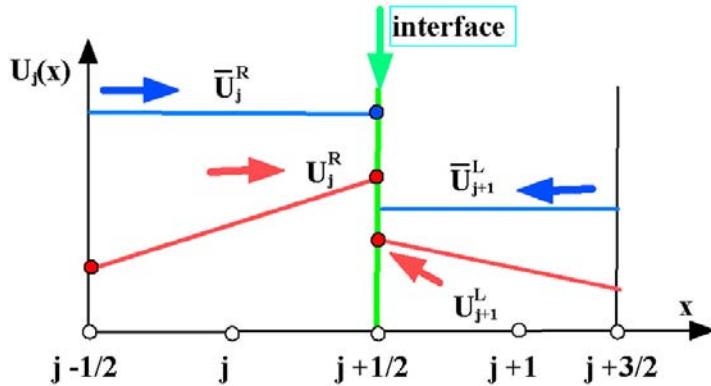


Figure 11 Problème de Riemann

soit :

$$\bar{\Delta}_j \leq 2\Delta_{j-1/2} \quad (10.48)$$

$$\bar{\Delta}_j \leq 2\Delta_{j+1/2} \quad (10.49)$$

Si la valeur de $\bar{\Delta}_j$ définie par l'algorithme de moyennage ne satisfait pas 10.48 ou 10.49, il faut la réduire de manière à ce qu'il n'y ait aucun dépassement (sur ou sous). On définira alors :

$$\Delta_{j,mono} = \min(2\Delta_{j-1/2}, \bar{\Delta}_j, 2\Delta_{j+1/2}) \quad (10.50)$$

Cette condition est valable pour le cas où $\Delta_{j-1/2}, \bar{\Delta}_j, \Delta_{j+1/2} \geq 0$. La loi générale est :

$$\Delta_{j,mono} = \min(2|\Delta_{j-1/2}|, |\bar{\Delta}_j|, 2|\Delta_{j+1/2}|) \operatorname{sgn} \Delta_j \quad (10.51)$$

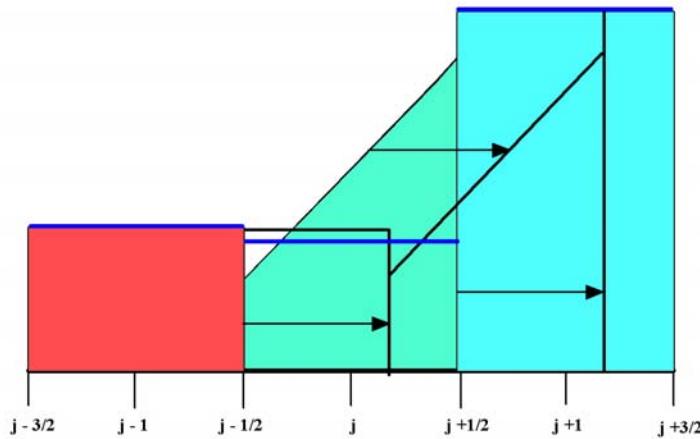


Figure 12 Evolution de la solution

si $sgn(\Delta_{j+1/2}) = sgn(\Delta_{j-1/2})$

$$\Delta_{j,mono} = 0 \text{ autrement} \quad (10.52)$$

L'équation 10.51 donne, en module, la plus grande valeur de $\bar{\Delta}_j$ qui ne causera aucune oscillation numérique pour toute valeur de c dans le domaine de stabilité. L'équation 10.52 assure que si U_j^n est un extrémum, il ne sera pas rehaussé par aucun gradient fini de U dans la cellule j . Ce mécanisme n'est, bien sûr, pas le seul. **Ici on cherche à montrer le principe.** C'est le choix de $\Delta_{j,mono}$ pour le limiter afin d'empêcher toutes les oscillations qui introduit **la notion de limiteur**. Le problème est maintenant de choisir correctement la pente de manière à ce que le schéma soit du second ordre monotone. Afin de montrer la liberté que l'on a dans le choix de $\Delta_{j,mono}$ on peut écrire:

$$\Delta_{j,mono} = \psi_{j+1/2}(R_j)\bar{\Delta}_j \quad (10.53)$$

où R_j est le contrôleur de régularité et $\psi_{j+1/2}$ un facteur de réduction (*limiteur*). En choisissant $\bar{\Delta}_j$ défini par 10.42 avec par exemple $k = 0$, on a :

$$\bar{\Delta}_j = \frac{1}{2} (\Delta_{j-1/2} + \Delta_{j+1/2}) \quad (10.54)$$

Un exemple de fonction est celle obtenue à partir de la fonction harmonique suivante:

$$\Delta_{j,mono} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta_{j-1/2}} + \frac{1}{\Delta_{j+1/2}} \right) \right]^{-1} = \frac{2\Delta_{j-1/2}\Delta_{j+1/2}}{\Delta_{j-1/2} + \Delta_{j+1/2}} \quad (10.55)$$

d'où :

$$\psi_{j+1/2} = \frac{2\Delta_{j-1/2}\Delta_{j+1/2}}{\Delta_{j-1/2} + \Delta_{j+1/2}} / \frac{1}{2} (\Delta_{j-1/2} + \Delta_{j+1/2}) = \frac{4\Delta_{j-1/2}\Delta_{j+1/2}}{(\Delta_{j-1/2} + \Delta_{j+1/2})^2} \quad (10.56)$$

avec :

$$\text{sign} \Delta_{j-1/2} = \text{sign} \Delta_{j+1/2} \quad (10.57)$$

soit avec la définition de R_j :

$$R_j = \frac{\Delta_{j-1/2}}{\Delta_{j+1/2}} \quad (10.58)$$

$$\psi_{j+1/2} = \psi_{vl} = \frac{4R_j}{R_j + 1}; R_j \geq 0 \quad (10.59)$$

Ce limiteur est le limiteur de *Van Leer*. Il peut être étendu aux régions $R < 0$ par la condition classique $\psi_{vl}(R) = 0$, $R < 0$.

10.5 Les fonctions limiteurs

Le limiteur est une fonction du contrôleur de régularité et son introduction dans les schémas permet en limitant les gradients d'empêcher l'apparition des oscillations.

10.5.1 Définition

Afin de voir la liberté que l'on a dans le choix de la valeur absolue de Δ_j ou en limitant cette valeur, on a donc avec 10.53 la fonction limiteur à partir de la relation:

$$\Delta_{j,mono} = \psi_{j+1/2}(R_j)\bar{\Delta}_j \quad (10.60)$$

Tout d'abord, la fonction ψ doit être limitée à être une fonction positive. D'autre part, lorsque $R < 0$ c'est-à-dire lorsqu'on rencontre un extremum dans la variation de la solution U , il semble logique de poser $\psi = 0$ correspondant à une pente nulle dans l'intervalle considéré. Cela interdit des comportements non monotones lors de changement de direction de pentes, avec pour conséquences une certaine perte de précision. On considère alors le flux numérique pour l'équation scalaire sous la forme suivante :

$$F_{j+1/2} = a(U_j + \frac{1}{2}(1-c)\psi_{j+1/2}(U_{j+1} - U_j)) \quad (10.61)$$

où $\psi_{j+1/2}$ est pour l'instant une fonction libre. Si l'on choisit $\psi_{j+1/2} = 0$, on retrouve le schéma décentré et avec $\psi_{j+1/2} = 1$, on obtient le schéma de Lax-Wendroff. L'indice $j+1/2$ indique que $\psi_{j+1/2}$ prendra des valeurs différentes sur les différentes interfaces. Introduisons 10.61 dans l'expression :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) \quad (10.62)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) \\ &- \frac{1}{2}c(1-c)\psi_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) \\ &+ \frac{1}{2}c(1-c)\psi_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (10.63)$$

10.5.2 Compatibilité des données

Un schéma est dit *compatible avec les données* si la solution U_j^{n+1} en chaque point j , résultat de l'algorithme est borné par le couple décentré (U_j^n, U_{j-s}^n) , où $s = \text{sign}(c) = \text{sign}(a)$. Cela signifie que la solution U_j^{n+1} doit se situer entre U_j^n et U_{j-s}^n soit :

$$\min(U_j^n, U_{j-s}^n) \leq U_j^{n+1} \leq \max(U_j^n, U_{j-s}^n) \quad (10.64)$$

Ce qui implique la relation :

$$0 \leq \frac{(U_j^{n+1} - U_j^n)}{(U_{j-s}^n - U_j^n)} \leq 1 \quad (10.65)$$

Par suite, on en déduit avec 10.63:

$$\frac{(U_j^{n+1} - U_j^n)}{(U_{j-1}^n - U_j^n)} = c[1 - \frac{1}{2}(1-c)\psi_{j-1/2}] + \frac{1}{2}c(1-c)\frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \quad (10.66)$$

avec le contrôleur de régularité R_j :

$$R_j = \frac{(U_j^n - U_{j-1}^n)}{(U_{j+1}^n - U_j^n)} \quad (10.67)$$

Une condition suffisante pour supprimer les oscillations est donc que le terme de gauche varie entre 0 et 1, afin que U_j^{n+1} se situe entre U_j^n et U_{j-1}^n . De même, **on doit imposer la même condition pour le membre de droite**, par suite :

$$0 \leq c - \frac{1}{2}c(1-c)\psi_{j-1/2} + \frac{1}{2}c(1-c)\frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \leq 1 \quad (10.68)$$

Considérons tout d'abord l'inégalité de gauche :

$$-c \leq -\frac{1}{2}c(1-c)\psi_{j-1/2} + \frac{1}{2}c(1-c)\frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \quad (10.69)$$

En supposant que $0 \leq c \leq 1$; et en divisant par $-\frac{1}{2}c(1-c)$, il vient :

$$\frac{2}{(1-c)} \geq \psi_{j-1/2} - \frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \quad (10.70)$$

Avec l'inégalité de droite, on écrit :

$$-\frac{1}{2}c(1-c)\psi_{j-1/2} + \frac{1}{2}c(1-c)\frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \leq 1 - c \quad (10.71)$$

soit :

$$\psi_{j-1/2} - \frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \geq -\frac{2}{c} \quad (10.72)$$

et finalement les résultats 10.70 et 10.72 peuvent être combinés:

$$-\frac{2}{c} \leq \psi_{j-1/2} - \frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \leq \frac{2}{(1-c)} \quad (10.73)$$

Remarque : Si $\psi_{j-1/2} = \psi_{j+1/2} = 1$, on a le schéma de Lax-Wendroff; on constate alors que ce schéma n'est pas compatible avec toutes les données, puisque il sera compatible uniquement si les données vérifient la condition :

$$-\frac{1+c}{1-c} \leq \frac{1}{R_j} \leq \frac{c+2}{c} \quad \text{si } 0 \leq c \leq 1 \quad (10.74)$$

$$-\frac{1-c}{1+c} \leq R_j \leq \frac{c-2}{c} \quad \text{si } -1 \leq c \leq 0 \quad (10.75)$$

Il y a différents moyens de continuer. Le plus simple est de rechercher seulement les conditions suffisantes. Ainsi, pour $0 \leq c \leq 1$, est vérifiée la condition forte :

$$-2 \leq \psi_{j-1/2} - \frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \leq 2 \quad (10.76)$$

On introduit alors l'hypothèse que $\psi_{j+1/2}$ devrait être une fonction de $R_{j+1/2}$. Si cette fonction est telle que :

$$0 \leq \psi_{j+1/2} \leq 2 \quad (10.77)$$

$$0 \leq \frac{\psi_{j+1/2}}{R_j} \leq 2 \quad (10.78)$$

alors les conditions 10.76 sont automatiquement vérifiées. On peut illustrer ces conditions sur la figure 13. D'après le diagramme, si $R_j \leq 0$, on doit choisir $\psi_{j+1/2} = 0$.

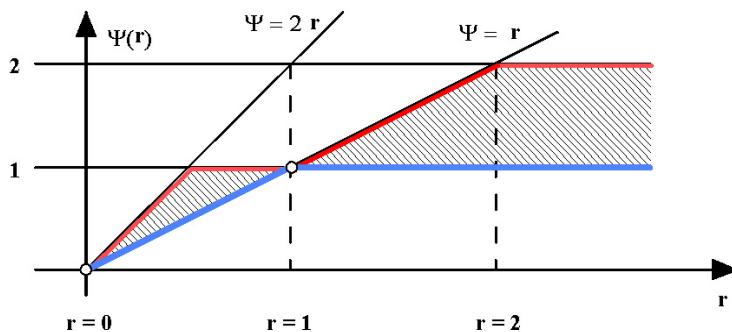


Figure 13 Domaine d'application de la fonction $\psi_{j+1/2}$: la zone hachurée

Mais si $R_j > 0$ on a une certaine liberté. Or, pratiquement dans tout le domaine de calcul, R_j est proche de 1. Puisque R_j est proche de 1, on aimerait que $\psi_{j+1/2}$ soit aussi proche de 1 pour obtenir une précision du second ordre. Le diagramme précédent montre que la combinaison $R = \psi = 1$ est dans la région permise. En fait, une condition pour que le schéma soit du second ordre presque partout est que la fonction $\psi(R)$ passe par le point $(1, 1)$ avec une pente finie.

10.5.3 Quelques autres limiteurs

Le limiteur de VAN ALBADA :

$$\psi_{va}(R) = \frac{R(R+1)}{R^2 + 1}; R \geq 0 \quad (10.79)$$

Le limiteur MINMOD ou (minbee) :

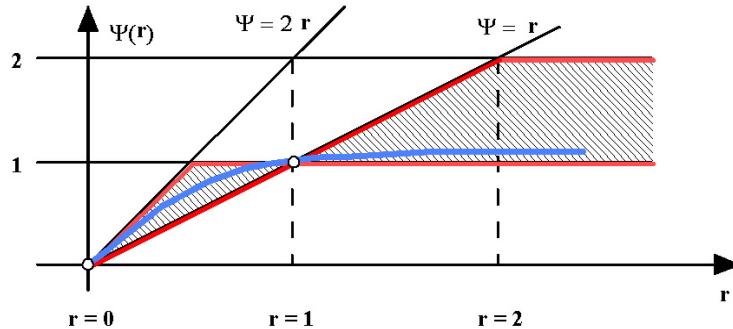


Figure 14 Limiteur de van Albada

$$\psi_{mb}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ R, & 0 \leq R \leq 1 \\ 1, & R \geq 1 \end{cases} \quad (10.80)$$

Dans ces cas, $\psi(R)$ n'est pas utilisé pour préserver la monotonicité, mais pour générer

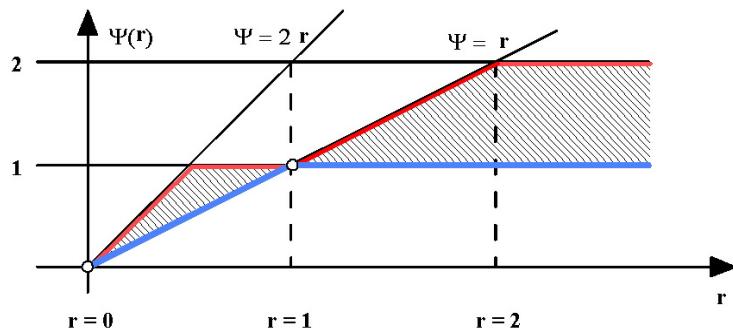


Figure 15 Limiteur minmod

de nouveaux schémas. Ces schémas ont $\psi(R > 1)$ pour $R > 1$ (*LW*) ou $0 = R < 1$ (*Moretti*). Cela suggère que l'on doit considérer un schéma pour lequel la valeur de δU soit exagérée : prendre la plus grande valeur entre $\Delta^+ U$ et $\Delta^- U$ pour toute valeur de R pour laquelle $\psi(R)$ reste dans le domaine permis.

Le limiteur SUPERBEE

$$\psi_{sb}(R) = \text{Max}[0, \min(2R, 1), \min(R, 1)] \quad (10.81)$$

ou :

$$\psi_{sb}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ 2R, & 0 \leq R \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq R < 1 \\ R, & 1 \leq R < 2 \\ 2, & R \geq 2 \end{cases} \quad (10.82)$$

Ce limiteur est appelé Superbee car il utilise comme fonction de moyenne, la fonction

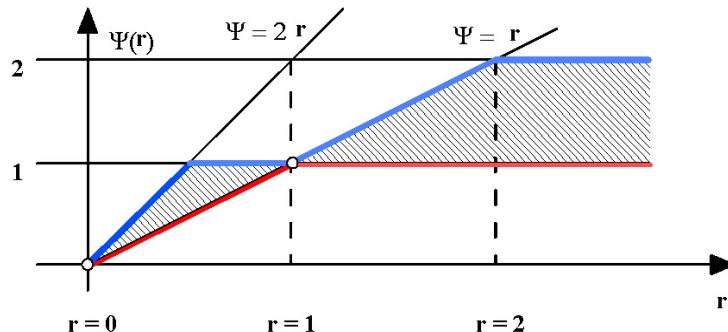


Figure 16 Limiteur SuperBee

$B(\Delta_{j+1/2}U, \Delta_{j-1/2}U)$ ou $B(R, 1)$ et telle que :

$$\delta U = B(R, 1) \Delta_{j-1/2}U \quad (10.83)$$

Ce schéma est excellent au voisinage des discontinuités de contact.

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc|c} n \setminus j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \sum \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0. & 0. & 0. & 0. & 5.5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0. & 0. & 0. & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0. & 0. & 0. & 6.5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{60}{64} & \frac{44}{64} & \frac{20}{64} & \frac{1}{64} & 0. & 7 \end{array} \right] \quad (10.84)$$

Il faut aller au moins à une dizaine d'itérations pour voir l'effet du Superbee.

Le limiteur ULTRABEE :

ou :

$$\psi_{ub}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \frac{2}{|c|}R, & 0 \leq R < \frac{|c|}{1-|c|} \\ \frac{2}{1-|c|}, & R \geq \frac{|c|}{1-|c|} \end{cases} \quad (10.85)$$

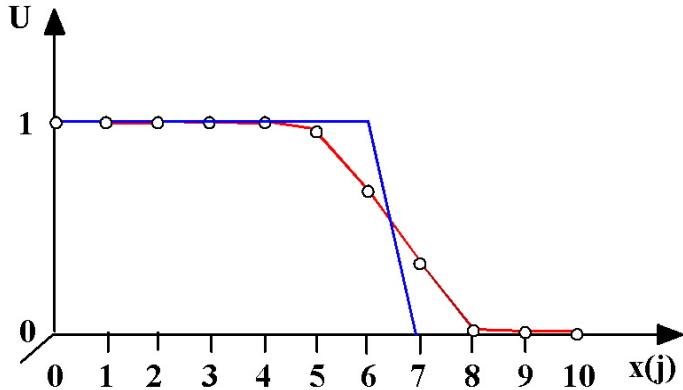


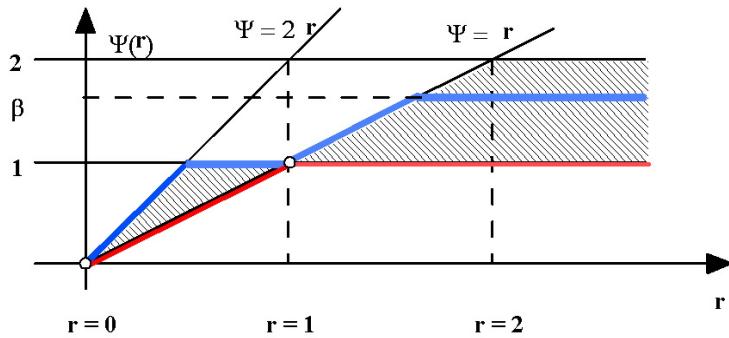
Figure 17 Superbee après quatres itérations

Les limiteurs β :

$$\psi_\beta(R) = \text{Max}[0, \min(\beta R, 1), \min(R, \beta)] \text{ avec } 1 < \beta < 2 \quad (10.86)$$

ou :

$$\psi_\beta(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ 2R, & 0 \leq R \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq R < 1 \\ R, & 1 \leq R < \beta \\ 2, & R > \beta \end{cases} \quad (10.87)$$

Figure 18 Limiteur β

10.5.4 Dissipation artificielle des schémas

Une valeur de $\psi(R) > 1$ signifie que la fonction "balance" S , précédemment définie est négative. On a en effet :

$$\psi(R) = 1 - S(R) \quad (10.88)$$

Considérons en effet le schéma q modifié (1.2.1 -4) et remplaçons la fonction bascule $S(R)$ par la relation 10.88, il vient :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}[c^2 + c(1-c)S(R)](U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.89)$$

ou

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}[c^2 + c(1-c)(1 - \psi(R))](U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.90)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}c(1-c)\psi(R)(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (10.91)$$

et on obtient finalement la formulation :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (10.92)$$

$$- \frac{1}{2}c(1-c)\psi(R)_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (10.93)$$

$$+ \frac{1}{2}c(1-c)\psi(R)_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (10.94)$$

Or, S est proportionnelle à la dissipation artificielle du schéma. En effet, pour une fonction régulière $\psi(R)$ la dissipation artificielle peut être aisément identifiée, par exemple, dans le cas d'un schéma utilisant la moyenne harmonique de Van Leer ou le limiteur de Van Albada, en prenant les formes non normalisées (avec le facteur $(R + 1)/2$) :

Cas du limiteur de Van Leer :

$$1 - \psi(R) = S(R) = 1 - \frac{4R}{(R + 1)^2} = \frac{(1 - R)^2}{(1 + R)^2} \quad (10.95)$$

$$S(R) = \frac{(\Delta^+U - \Delta^-U)^2}{(\Delta^+U + \Delta^-U)^2} \approx \frac{1}{4}(\Delta x)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]^2 \quad (10.96)$$

Cas du limiteur de Van Albada :

$$1 - \psi(R) = S(R) = 1 - \frac{2R}{1 + R^2} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2} \quad (10.97)$$

$$S(R) = \frac{(\Delta^+U - \Delta^-U)^2}{(\Delta^+U)^2 + (\Delta^-U)^2} \approx \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]^2 \quad (10.98)$$

On constate alors que le taux de variation du gradient $\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\partial U}{\partial x} \right)$, soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\frac{\partial U}{\partial x}} \quad (10.99)$$

semble être la bonne fonction pour traiter la régularité d'une solution et pour indiquer les endroits où les oscillations numériques peuvent apparaître.

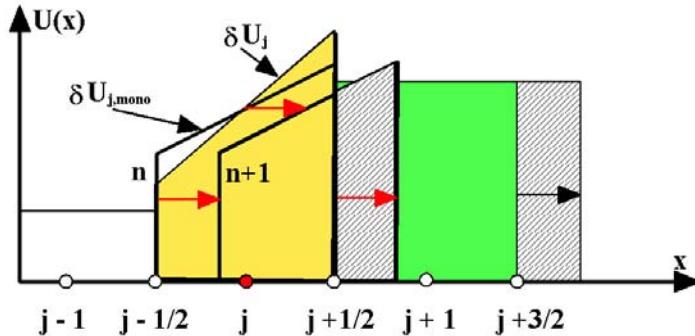


Figure 19 Influence du nombre de Courant

10.5.5 Influence du nombre de courant sur les limiteurs

Tous les limiteurs étudiés dans les paragraphes précédents sont indépendants du nombre de Courant c (formulation forte). Or, le gradient d'une fonction linéaire représentant l'approximation de la fonction dans une cellule est limité sans tenir compte de la grandeur du pas de temps. Il est alors évident qu'une formulation plus faible devrait être formulée si l'on doit tenir compte de c . Sur la figure 19 le gradient de U a été réduit suffisamment pour que la moyenne convectée soit égale à U_{j+1} , plutôt que de convecter la valeur maximum.

On a :

$$U_j^n + \frac{1}{2} (1 - c) \delta U_{j,mono}^n \leq U_{j+1}^n \quad (10.100)$$

soit :

$$\delta U_{j,mono}^n \leq \frac{2}{1 - c} (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (10.101)$$

Une limite similaire peut-être obtenue lorsque c est proche de 1, et en considérant la cellule $j - 1$: on obtient finalement les conditions suivantes (Van Leer) 1977):

$$\delta U_{j,mono}^n \leq \left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ \frac{2}{c} |U_j^n - U_{j-1}^n|, \delta U_j^n, \frac{2}{1-c} |U_{j+1}^n - U_j^n| \right\} \\ \text{si } \text{sign} |U_j^n - U_{j-1}^n| = \text{sign} |U_{j+1}^n - U_j^n| \\ 0 \text{ autrement} \end{array} \right\} \quad (10.102)$$

Ce genre de limiteur, dépendant de c peut être dangereux, car il peut provoquer des dégradations dans les régions continues.

Chapter 11

LE FONDEMENT DES SCHÉMAS TVD

Dans les chapitres précédents, nous avons montré en détails comment, à partir d'un schéma du premier ordre linéaire classique, il était possible, moyennant une analyse fine des propriétés physiques d'une part et des propriétés des schémas numériques d'autre part, de construire des schémas non linéaires d'ordre supérieur monotones, conservatifs et non oscillants. Nous avons essayé de montrer la plupart des propriétés requises pour de tels schémas. Nous allons dans la suite effectuer une approche plus générale permettant de construire des classes plus larges de schémas d'ordre supérieur.

11.1 Définitions de schémas TVD

En 1983, Harten développa des schémas non oscillants plus acceptables pour l'analyse numérique, en introduisant le concept de schéma *TVD* (Total Variation Diminishing). Considérons le cas de la solution d'une équation scalaire monodimensionnelle; On défini la variation totale d'une variable u par :

$$TV(u) = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (11.1)$$

qui sous forme discrète s'écrit :

$$TV(U^n) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |U_j^n - U_{j-1}^n| \quad (11.2)$$

Un schéma *TVD*, plus précisément *TVNI* (*Total Variation Non Increasing*), permet de définir U^n tel que :

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \quad (11.3)$$

Etant donnée une séquence de valeurs monotones de U^n la valeur de TV est égale à :

$$TV(U^n) = |U_\infty^n - U_{-\infty}^n| \quad (11.4)$$

et est indépendant des valeurs intermédiaires. Si une telle suite de valeurs est convecée par un schéma qui introduit de nouveaux extrêma, la valeur de TV augmentera. Il suffit de voir la figure ?? pour s'en convaincre : De nombreux schémas TVD ont été développés au cours des années. On peut classer ses schémas en schémas TVD

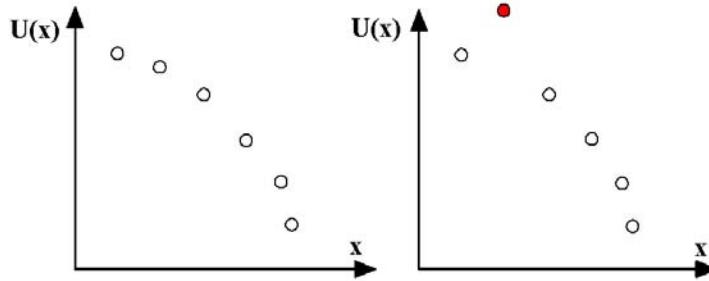


Figure 1

du premier ordre, en schémas TVD du second ordre et en schéma TVD de type prédicteur correcteur. Par ailleurs dans chaque catégorie, on introduit les formulation explicite et implicite. Pour les schémas aux différences finies, on peut aussi introduire les classes centré et décentré. En plus pour chaque formulation diverses fonctions limiteurs peuvent être utilisées. D'autre part, pour chaque catégorie, des formulations numériques diverses peuvent être choisies. Dans ces notes, on ne traitera que l'approche générale pour les schémas explicites.

11.2 Schémas préservant la monotonicité

Si les propriétés de monotonicité suivantes sont garanties aux cours du temps :

- a) Localement aucun nouvel extremum ne peut être créé;
- b) La valeur d'un minimum local ne peut décroître et la valeur d'un maximum local ne peut augmenter.

On dit alors que le schéma préserve la monotonicité. Donc si U_j^n est monotone; alors U_j^{n+1} l'est aussi.

Dans ces conditions, aucun dépassement local ne peut arriver et l'on peut montrer que :

- a) **Tous les schémas monotones sont TVD**
- b) **Tous les schémas TVD préserve la monotonicité.**

Tous les schémas linéaires qui préservent la monotonicité ne sont précis qu'au premier ordre. Par contre les schémas non linéaires *TVD* peuvent avoir une précision d'ordre supérieur.

11.3 Conditions suffisantes pour qu'un schéma soit TVD

11.3.1 Approche théorique pour les schémas TVD explicites

Harten donna une condition suffisante pour qu'un schéma ait la propriété d'être *TVD*. Afin de pouvoir utiliser le critère de Harten, le schéma numérique doit être écrit sous

la forme suivante, dans le cas de schémas explicites :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - C_{j-1/2}^+ [U_j^n - U_{j-1}^n] + C_{j+1/2}^- [U_{j+1}^n - U_j^n] \quad (11.5)$$

que l'on peut écrire sous la forme condensée :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} U_j^n + C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} U_j^n \quad (11.6)$$

on en déduit :

$$U_{j-1}^{n+1} = U_{j-1}^n - C_{j-3/2}^+ \Delta_{j-3/2} U_j^n + C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} U_j^n \quad (11.7)$$

d'où en soustrayant 11.7 de 11.6 :

$$\Delta_{j-1/2} U_j^{n+1} = U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} \quad (11.8)$$

$$\Delta_{j-1/2} U_j^{n+1} = \Delta_{j-1/2} U_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} U_j^n + C_{j-3/2}^+ \Delta_{j-3/2} U_j^n \quad (11.9)$$

$$+ C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} U_j^n - C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} U_j^n \quad (11.10)$$

$$\Delta_{j-1/2} U_j^{n+1} = (1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^-) \Delta_{j-1/2} U_j^n + C_{j-3/2}^+ \Delta_{j-3/2} U_j^n + C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} U_j^n \quad (11.11)$$

Par suite :

$$TV(U_j^{n+1}) = \sum \left| (1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^-) \Delta_{j-1/2} U_j^n + C_{j-3/2}^+ \Delta_{j-3/2} U_j^n + C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} U_j^n \right| \quad (11.12)$$

$$TV(U_j^{n+1}) \leq \sum \left| (1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^-) \Delta_{j-1/2} U_j^n \right| + \sum \left| C_{j-3/2}^+ \Delta_{j-3/2} U_j^n \right| + \sum \left| C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} U_j^n \right| \quad (11.13)$$

Si les trois conditions suivantes sont vérifiées pour tout j :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^- \geq 0 \\ C_{j-1/2}^+ \geq 0 \\ C_{j-1/2}^- \geq 0 \end{array}} \quad (11.14)$$

alors 11.13 peut s'écrire :

$$TV(U_j^{n+1}) \leq \sum (1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^-) |\Delta_{j-1/2} U_j^n| + \sum C_{j-3/2}^+ |\Delta_{j-3/2} U_j^n| + \sum C_{j+1/2}^- |\Delta_{j+1/2} U_j^n| \quad (11.15)$$

$$= \sum (1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^-) |\Delta_{j-1/2} U_j^n| + \sum C_{j-1/2}^+ |\Delta_{j-1/2} U_j^n| + \sum C_{j-1/2}^- |\Delta_{j-1/2} U_j^n| \quad (11.16)$$

$$= TV(U_j^n) \quad (11.17)$$

11.3.2 Application avec le schéma C.I.R.

Pour comprendre les conditions 11.14 considérons le schéma C.I.R du premier ordre; exemple de base de 11.5 :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c^+ \Delta_{j-1/2} U_j^n - c^- \Delta_{j+1/2} U_j^n \quad (11.18)$$

avec :

$$c^+ = \max(0, c) = \frac{c + |c|}{2} \geq 0 \quad (11.19)$$

$$c^- = \min(0, c) = \frac{c - |c|}{2} \leq 0 \quad (11.20)$$

D'après (11.14) ce schéma est *TVD* si :

$$\begin{aligned} 1 - c^+ - c^- &\geq 0 \\ c^+ &\geq 0 \\ -c^- &\geq 0 \end{aligned}$$

(11.21)

La première condition peut être écrite $|c| \leq 1$; ce qui est la condition *CFL*, les deux autres sont vérifiées par définition. **La condition globale** 11.14 a été réduite à **une condition suffisante local**; on notera qu'en général les coefficients C^+ et C^- dépendront de grandeurs, telles que θ ou R (contrôleur de régularité) afin que le schéma soit *TVD*. Le problème avec le système 11.14 est que sa forme n'est pas unique. Ainsi, la relation 11.5 peut s'écrire :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \{C_{j-1/2}^+ - C_{j+1/2}^- \frac{\Delta_{j+1/2} U_j^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n}\} \Delta_{j-1/2} U_j^n \quad (11.22)$$

qui conduit aux conditions :

$$0 \leq C_{j-1/2}^+ - C_{j+1/2}^- \frac{\Delta_{j+1/2} U_j^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \leq 1 \quad (11.23)$$

et l'on peut montrer que les schémas satisfaisant les conditions 11.23 ne sont pas *TVD*. Ainsi, à titre d'exemple, lorsque on prend le simple schéma "upwind" avec $c = c^- < 0$; la condition 11.23 devient :

$$0 \leq c^- \frac{\Delta_{j+1/2} U_j^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \leq 1 \quad (11.24)$$

et cette condition ne peut être vérifier que pour des valeurs négatives de θ ou R ; et par suite, pas pour toutes les valeurs initiales. En conséquence, il est nécessaire de mettre en forme un schéma sous la forme 11.5 qui donnent les conditions *TVD* les moins restrictives. Pour trouver de telles formes, on doit être guidé par d'autres principes, et en particulier les lois d'interpolation non-oscillantes (les limitateurs), présentées précédemment.

11.3.3 Le problème des extrémas

Par ailleurs, les schémas *TVD* auront pratiquement toujours tendance à aplatisir les extréma; considérons le schéma du second ordre *LW* modifié réécrit sous la forme suivante :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{c}{2}(1-c)(\delta U_j^n - \delta U_{j-1}^n) \quad \text{si } c \geq 0 (a \geq 0) \quad (11.25)$$

Parmi les schémas de cette forme, la propriété *TVD* est requise seulement si :

$$\delta U_{j,mono}^n = 0 \text{ pour } \theta_{j+1/2}^n \leq 0 \quad (11.26)$$

Afin de permettre des valeurs au temps $n+1$, au voisinage d'extremum qui se trouve en dehors des valeurs discrètes des valeurs au temps n , on doit affaiblir la condition :

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \quad (11.27)$$

Une analyse de propriétés *TVD* du schéma 11.25 procède de la manière suivante : tout d'abord; il faut identifier C^+ :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - C_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} U_j^n \quad (11.28)$$

avec :

$$C_{j-1/2}^+ = c + \frac{c}{2}(1-c)\{\psi(\theta_j^n) \frac{\delta U_j^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} - \psi(\theta_{j-1}^n) \frac{\delta U_{j-1}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n}\} \quad (11.29)$$

puis on impose 11.14 :

$$0 \leq c + \frac{c}{2}(1-c)\{\frac{\psi(\theta_j^n) \delta U_j^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} - \frac{\psi(\theta_{j-1}^n) \delta U_{j-1}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n}\} \leq 1 \quad (11.30)$$

ce qui est équivalent à :

$$0 \leq \frac{U_j^n - U_j^{n+1}}{U_j^n - U_{j-1}^n} \leq 1 \quad (11.31)$$

et implique que U_j^{n+1} se trouve entre U_j^n et U_{j-1}^n ; une condition suffisante pour la monotonie peut s'écrire :

$$\frac{\delta U_{j,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} - \frac{\delta U_{j-1,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \geq -\frac{2}{1-c} \quad (11.32)$$

$$\frac{\delta U_{j,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} - \frac{\delta U_{j-1,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \leq \frac{2}{c} \quad (11.33)$$

avec :

$$\delta U_{j,mono}^n = \psi(\theta_j^n) \delta U_j^n \quad (11.34)$$

Supposons que $sgn(\delta U_{j,mono}^n) = sgn(\Delta_{j-1/2} U_j^n) = sgn(\delta U_{j-1,mono}^n)$; dans ce cas les termes à gauche de 11.32 vont partiellement s'éliminer. Le plus mauvais cas pour 11.32 est celui où $\delta U_{j,mono}^n = 0$, et dans cette configuration; on doit imposer :

$$\frac{\delta U_{j-1,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \leq \frac{2}{1-c} \quad (11.35)$$

Le plus mauvais cas pour 11.33 est $\delta U_{j-1,mono}^n = 0$; ce qui implique la condition :

$$\frac{\delta U_{j,mono}^n}{\Delta_{j-1/2} U_j^n} \leq \frac{2}{c} \quad (11.36)$$

D'autre part la condition 11.35 peut aussi s'exprimer :

$$\frac{\delta U_{j,mono}^n}{\Delta_{j+1/2} U_j^n} \leq \frac{2}{1-c} \quad (11.37)$$

car elle doit être valable pour tout point j . C'est la condition 10.100 que l'on a déjà trouver par ailleurs. De même avec 11.36 et l'on retombe sur les conditions 10.101.

11.3.4 Méthode de construction de schémas TVD du second ordre explicites

Pour obtenir un schéma du second ordre TVD, il est nécessaire d'écrire le schéma comme un schéma du premier ordre vérifiant la monotonicité, auquel on rajoute des termes supplémentaires pour obtenir une précision supérieure. Ces derniers termes sont limités de manière à satisfaire aussi la condition de monotonicité. La méthode pour construire des schémas TVD du second ordre est donc la suivante :

1) On choisit un flux numérique monotone du premier ordre

A titre d'exemple, on prend le flux numérique du schéma *upwind du 1er ordre de Roe* :

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1} - |a_{j+1/2}^n|(U_{j+1}^n - U_j^n)) \quad (11.38)$$

avec :

$$a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|) \quad (11.39)$$

et :

$$a^- = \frac{1}{2}(a - |a|) \quad (11.40)$$

que l'on peut écrire avec le flux physique $f = aU$ sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}[a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + a_{j+1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (11.41)$$

2) On introduit un flux numérique du second ordre:

Par exemple:

$$\tilde{F}_{j+1/2}^n = [F_{j+1/2}^n + \frac{1}{2}(f_j - F_{j-1/2}^n) + \frac{1}{2}(f_{j+1} - F_{j+3/2}^n)] \quad (11.42)$$

que l'on peut écrire de nouveau avec $f = aU$ et en tenant compte de 11.38 sous la forme :

$$\tilde{F}_{j+1/2}^n = [F_{j+1/2}^n + \frac{1}{2}a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a_{j+3/2}^+(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)] \quad (11.43)$$

où l'on tenu compte du fait que :

$$(f_j - F_{j-1/2}^n) = \frac{1}{2} \left(a_{j-1/2}^+ + \left| a_{j-1/2}^+ \right| \right) (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (11.44)$$

$$(f_{j+1} - F_{j+3/2}^n) = \frac{1}{2} \left(a_{j+1/2}^+ + \left| a_{j+1/2}^+ \right| \right) (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (11.45)$$

Par suite sous la formulation non linéaire, on obtient :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{a_{j+1/2}^-}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{a_{j+3/2}^-}{2}(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)] \quad (11.46)$$

$$-\frac{1}{\Delta x} [a_{j-1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{a_{j-3/2}^+}{2}(U_{j-1}^n - U_{j-2}^n) - \frac{a_{j+1/2}^-}{2}(U_{j-1}^n - U_j^n)] \quad (11.47)$$

et sous la formulation linéaire, on aurait :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{a^+}{\Delta x} [(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n - U_{j-2}^n)] \quad (11.48)$$

$$-\frac{a^-}{\Delta x} [(U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{1}{2}(U_{j+1}^n - U_j^n) - \frac{1}{2}(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)] \quad (11.49)$$

3) On restreint l'amplitude des gradients apparaissant par des limiteurs non linéaires vérifiant les conditions TVD

L'introduction de limiteurs se fait sur les termes de dissipation; on aura donc la formulation suivante du flux à partir de 11.43 :

$$\tilde{F}_{j+1/2}^n = [F_{j+1/2}^n + \frac{1}{2}a_{j-1/2}^+ \Psi_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a_{j+3/2}^+ \Psi_{j+3/2}^-(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)] \quad (11.50)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \left[a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}a_{j-1/2}^+ \Psi_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a_{j+3/2}^- \Psi_{j+3/2}^-(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n) \right] \\ & -\frac{1}{\Delta x} \left[a_{j-1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{1}{2}a_{j-3/2}^+ \Psi_{j-3/2}^+(U_{j-1}^n - U_{j-2}^n) - \frac{1}{2}a_{j+1/2}^- \Psi_{j+1/2}^-(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n) \right] \end{aligned} \quad (11.51)$$

avec :

$$\Psi_{j-1/2}^+ = \Psi(R_{j-1/2}^+) \quad (11.52)$$

$$\Psi_{j+3/2}^- = \Psi(R_{j+3/2}^-) \quad (11.53)$$

$$\Psi_{j+1/2}^- = \Psi(R_{j+1/2}^-) \quad (11.54)$$

$$\Psi_{j-3/2}^- = \Psi(R_{j-3/2}^-) \quad (11.55)$$

Les contrôleurs de régularité sont alors définis par :

$$R_{j-1/2}^+ = \frac{a_{j+1/2}^+(U_{j+1}^n - U_j^n)}{a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n)} \quad (11.56)$$

$$R_{j+3/2}^- = \frac{a_{j+1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n)}{a_{j+3/2}^-(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)} \quad (11.57)$$

$$R_{j+1/2}^- = \frac{a_{j+1/2}^-(U_j^n - U_{j-1}^n)}{a_{j-1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n)} \quad (11.58)$$

$$R_{j-3/2}^- = \frac{a_{j+1/2}^-(U_j^n - U_{j-1}^n)}{a_{j-3/2}^-(U_{j-1}^n - U_{j-2}^n)} \quad (11.59)$$

4) On choisit ensuite un schéma d'intégration temporel, vérifiant les conditions TVD

Pour simplifier; on prendra le schéma d'Euler. Dans ce cas, on réécrit la relation 11.51 sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n \quad (11.60)$$

$$-\lambda[a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\Psi_{j-1/2}^+ a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\Psi_{j+3/2}^- a_{j+3/2}^-(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)] \quad (11.61)$$

$$-\lambda[a_{j-1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{1}{2}\Psi_{j+1/2}^- a_{j+1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n) - \frac{1}{2}\Psi_{j-3/2}^+ a_{j-3/2}^+(U_{j-1}^n - U_{j-2}^n)] \quad (11.62)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j-1/2}^+ - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j-3/2}^+}{R_{j-3/2}^+}]a_{j-1/2}^+(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (11.63)$$

$$-\lambda[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j+1/2}^- - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j+3/2}^-}{R_{j+3/2}^-}]a_{j+1/2}^-(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (11.64)$$

ou :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j-1/2}^+ - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j-3/2}^+}{R_{j-3/2}^+}](f_j - F_{j-1/2}^n) \quad (11.65)$$

$$-\lambda[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j+1/2}^- - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j+3/2}^-}{R_{j+3/2}^-}](F_{j+1/2}^n - f_j) \quad (11.66)$$

D'après 11.5 et avec $c = \lambda a$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - C_{j-1/2}^+[(U_j^n - U_{j-1}^n)] + C_{j+1/2}^-[(U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (11.67)$$

$$C_{j-1/2}^+ = -[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j-1/2}^+ - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j-3/2}^+}{R_{j-3/2}^+}]c_{j-1/2}^+ \quad (11.68)$$

$$C_{j-1/2}^- = [1 + \frac{1}{2}\Psi_{j+1/2}^- - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j+3/2}^-}{R_{j+3/2}^-}]c_{j-1/2}^- \quad (11.69)$$

Le schéma est *TVD* s'il vérifie les conditions suivantes :

$$1 - C_{j-1/2}^+ - C_{j-1/2}^- \geq 0 \quad (11.70)$$

$$C_{j-1/2}^+ \geq 0 \quad (11.71)$$

$$C_{j-1/2}^- \geq 0 \quad (11.72)$$

soit :

$$C_{j-1/2}^+ = -[1 + \frac{1}{2}\Psi_{j-1/2}^+ - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j-3/2}^+}{R_{j-3/2}^+}]c_{j-1/2}^+ \geq 0 \quad (11.73)$$

$$C_{j-1/2}^- = [1 + \frac{1}{2}\Psi_{j+1/2}^- - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{j+3/2}^-}{R_{j+3/2}^-}]c_{j-1/2}^- \geq 0 \quad (11.74)$$

et avec la condition sur le limiteur $\Psi(R) - \frac{\Psi(R)}{R} \leq \alpha$ où $0 < \alpha \leq 2$; on a aussi la nouvelle condition *CFL* :

$$C_{j-1/2}^+ + C_{j-1/2}^- \leq |c_{j-1/2}| \frac{1+\alpha}{2} \leq 1 \quad (11.75)$$

5) On contrôle éventuellement la condition d'entropie.

Chapter 12

RÉFÉRENCES

12.1 Chapitre 1

- *Cours de Mécanique des Fluides Compressibles*, A. Drotz, 2000-2001

12.2 Chapitre 2

- *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, E. Toro, Springer

12.3 Chapitre 3

- *Dynamique des Fluides*, I.L. Ryhming, PPUR
- *Compressible Fluid Dynamics*, Thompson, McGraw-Hill

12.4 Chapitre 4

- *Numerical Computation of Internal and External Flows*, C. Hirsch, Vol II Wiley

12.5 Chapitre 5

- *Cours de Simulation Numérique B*, A. Drotz & R. Owens, 2000-2001
- *Numerical Computation of Internal and External Flows*, C. Hirsch, Vol I Wiley
- *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Fletscher, Vol I Springer
- *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, P.L. Roe, Icase No 35

12.6 Chapitre 6

- *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, E. Toro, Springer
- *Numerical Computation of Internal and External Flows*, C. Hirsch, Vol I Wiley
- *Numerical Fluid Dynamics II*, Bram van Leer, Icase No 36
- *Computational Fluid Dynamics*, R.L. Leveque, VKI Lecture Series 1990-03

- *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme* B. van Leer, Journal of Computational Physics **14**, 361-370 (1974)
- *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, III. Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for ideal Compressible Flow*, B. van Leer, Journal of Computational Physics **23**, 263-275 (1977)
- *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, IV. A New Approach to numerical Convection*, B. van Leer, Journal of Computational Physics **23**, 276-299 (1977)
- *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, B. van Leer, Journal of Computational Physics **32**, 101-136 (1979)
- *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vector and Difference Scheme*, P.L. Roe, Journal of Computational Physics **43**, 357-372 (1981)
- *Efficient construction and utilisation of approximate Riemann Solution*, P.L. Roe, J. Pike, Computating Methods in Applied Sciences and Engineering, Elsevier Science Publishers, INRIA (1984)
- *High Resolution Schemes using Flux limiters for Hyperbolic Conservation Laws*, P.K. Sweby, SIAM J. Numer. Ana. **21**, 995-1011 (1984)
- *Some Contributions to the modelling of Discontinuous Flows*, P.L. Roe, Lectures in Applied Mathematics **22**, 163-193 (1985)

12.7 Chapitre 7

- *Numerical Computation of Internal and External Flows*, C. Hirsch, Vol II Wiley
- *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, E. Toro, Springer
- *Computational Fluid Dynamics*, H.C. Yee, VKI Lecture Series 1989-04

12.8 Chapitre 8

- *Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications*, Y.C. Yee, Computational Physics. **68**, 151-179 (1987)
- *Upwind and Symmetric Shock Capturing Schemes*, Y.C. Yee, NASA TM 89464. (1987)
- *Very High order Accurate TVD Scheme*, S. Osher and S. Chakravarthy, Icase No 80-44. (1984)