

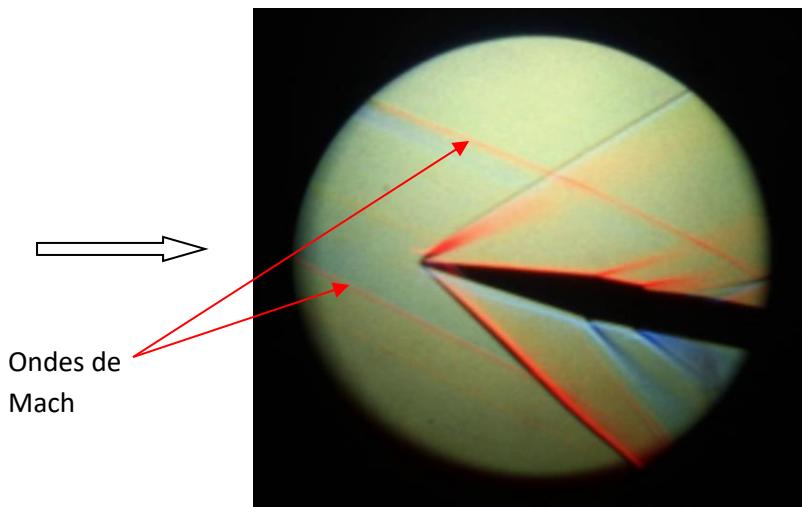
## Mécanique des fluides compressibles

### Exercice 4.0

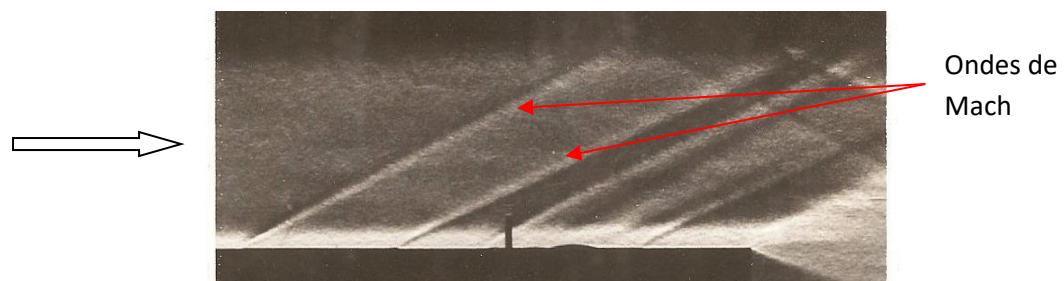
Le nombre de Mach d'un écoulement supersonique peut être évalué expérimentalement à partir des ondes (lignes) de Mach, qui sont des perturbations d'intensité infinitésimale, et qui n'affectent donc pas l'écoulement. Ces lignes sont produites expérimentalement par des défauts de parois (poussières, « scotch », défaut d'usinage etc.), et sont visualisées grâce à des méthodes optiques basées sur la réfraction de rayons lumineux traversant des zones de variation de masse volumique (au sein d'une onde de Mach). Ces (faibles) variations de masse volumique induisent des variations d'indices de réfraction dans le chemin optique. Les trois méthodes optiques communément utilisées sont l'ombrographie (« shadowgraphy »), la méthode Schlieren, et l'interférométrie. Ces méthodes sont également utilisées pour la visualisation d'ondes non-infinitésimales, comme les ondes de chocs et ondes de détente.

Les images suivantes vous permettent de vous familiariser avec ce concept d'onde de Mach. Pour chacune des images suivantes, évaluer le nombre de Mach de l'écoulement.

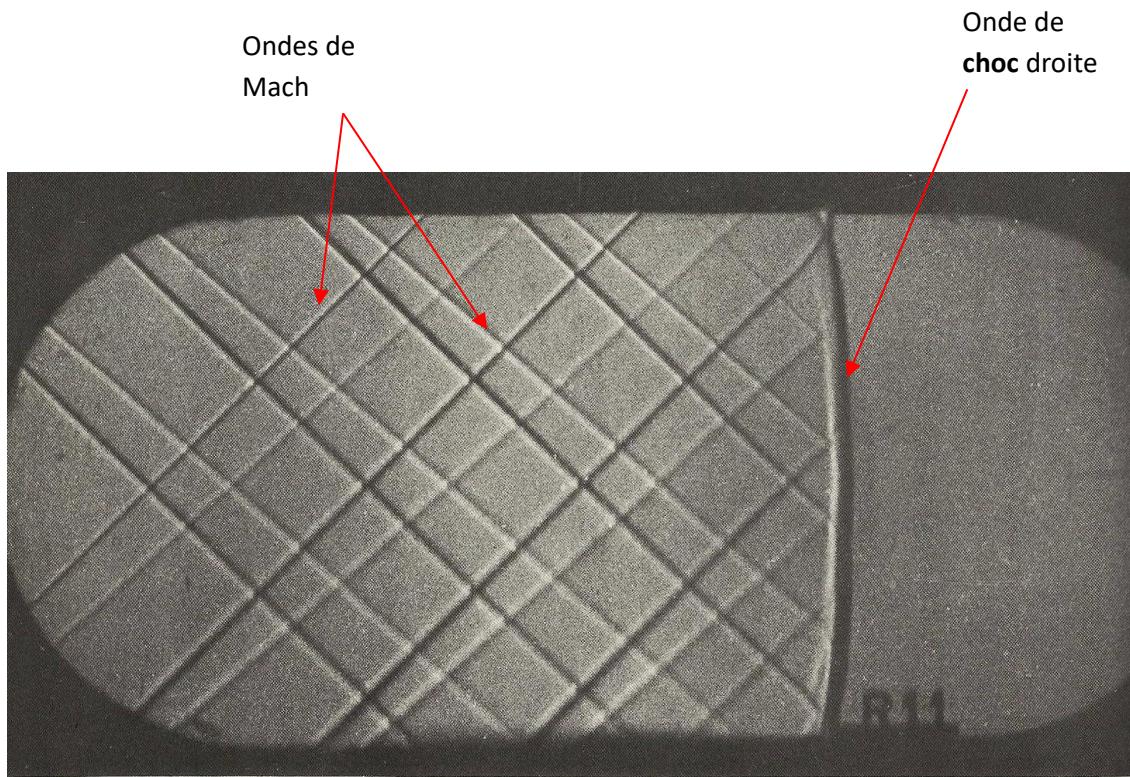
- a. Ecoulement supersonique horizontal, de gauche à droite, autour d'un dièdre à un angle d'attaque (Schlieren coloré, hepia, Genève) : un scotch d'une certaine largeur a été collé en amont sur la partie supérieure de la tuyère, d'où les DEUX ondes de Mach, l'une provenant du bord avant et l'autre du bord arrière du scotch.



- b. Ecoulement supersonique dans une tuyère (image obtenue par méthode Schlieren, dans le Supersonic Wind Tunnel de Caltech - quand j'avais votre âge!): plusieurs bouts de scotch ont été collés le long de la paroi de la tuyère.



c. Ecoulement dans une tuyère (avec onde de choc normale).



225. Normal shock wave at  $M=1.5$ . A pattern of pairs of weak oblique shock waves (the N-waves of figures 265 and 269) is produced by strips of tape on the floor and ceiling of a supersonic nozzle. They terminate at an almost

straight and normal shock wave, showing that the flow is subsonic downstream. U.S. Air Force photograph, courtesy of Arnold Engineering Development Center

d. Ecoulement en sortie de tuyère de Laval.

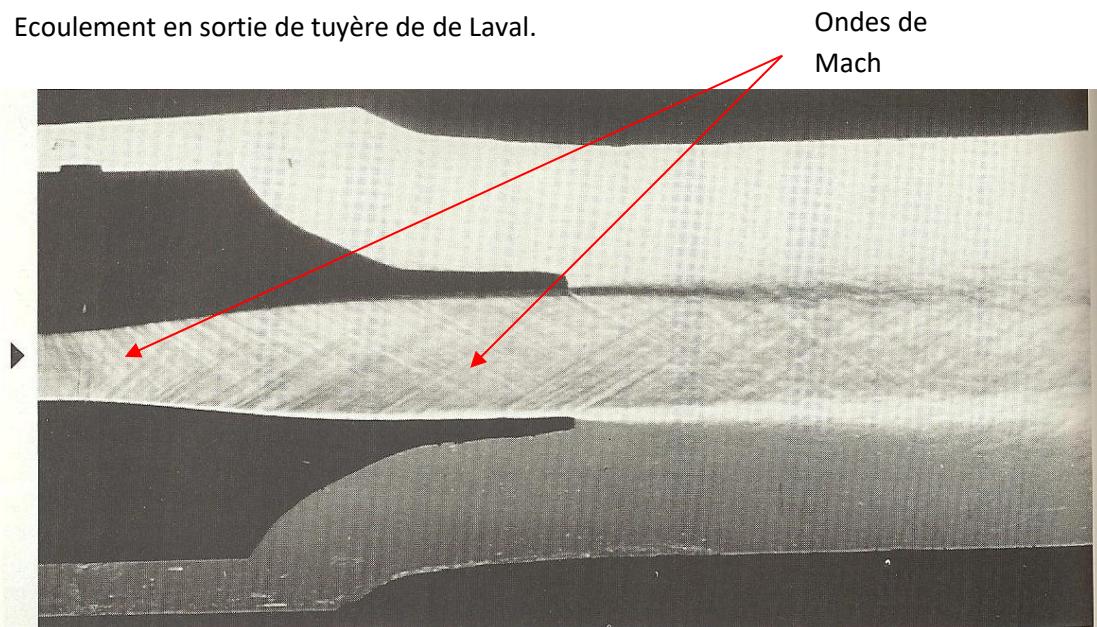
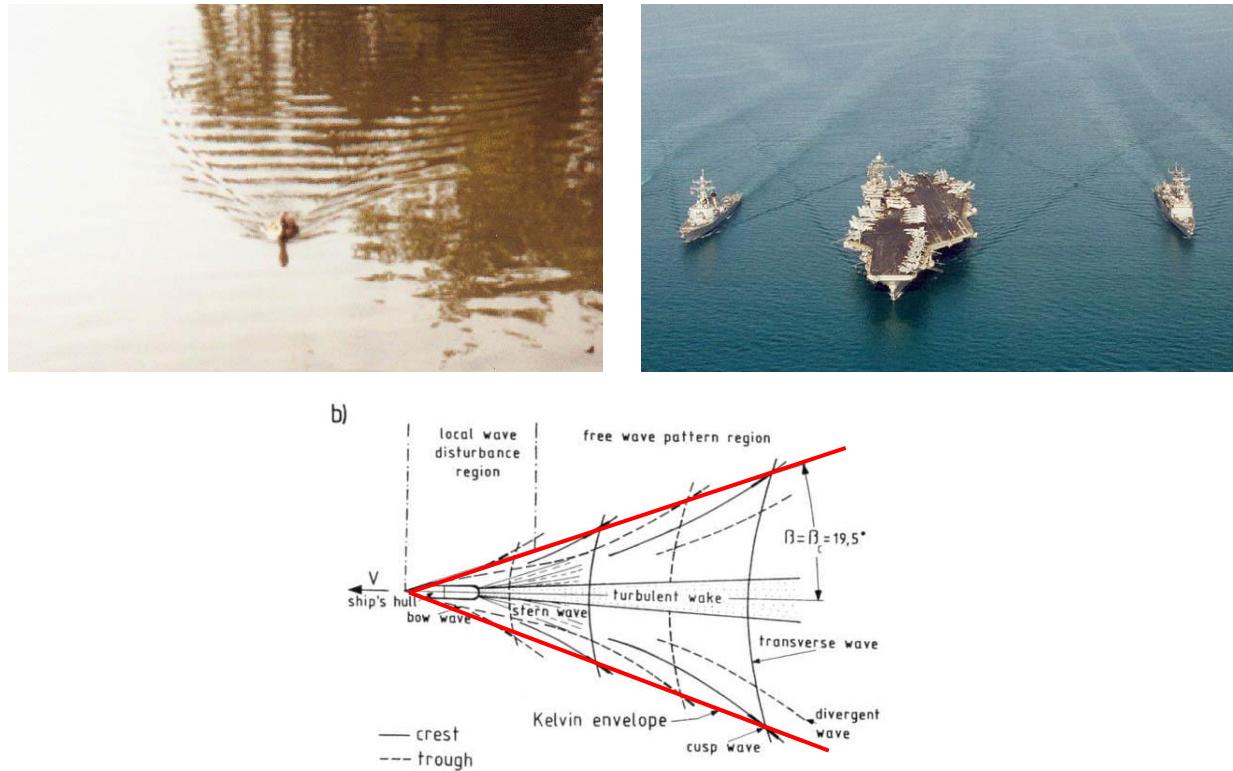


Fig. 52. Correct-expansion of a Laval nozzle flow  
[air, stagnation pressure of the incoming flow 364 kPa, nozzle back pressure 47 kPa, exit flow static pressure 47 kPa, exit flow velocity 510 m/s (Mach number 2.0)].

## Exercice additionnel (non requis)

### Sillage d'un corps flottant

Pour un corps flottant se déplaçant sur la surface d'un liquide, un sillage d'ondes est généré. On va démontrer d'une manière simplifiée que l'enveloppe du sillage (en rouge sur le schéma ci-dessous, appelé onde ou enveloppe de Kelvin) est indépendante du corps (canard ou porte-avion) et fait toujours un angle proche de  $19.5^\circ$ .



Contrairement aux ondes acoustiques, les ondes de surface obéissent une loi de dispersion donnée par :

$$\omega = \sqrt{g \cdot k}$$

où  $g$  est l'accélération due à la gravité,  $k$  est le nombre d'ondes  $2\pi / \lambda$  ( $\lambda$  étant la longueur d'onde), et  $\omega$  la fréquence angulaire de l'onde. La vitesse de phase de l'onde  $v_\phi$  est donnée par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

tandis que la vitesse de groupe (vitesse de propagation de l'information ou de l'énergie) est donnée par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

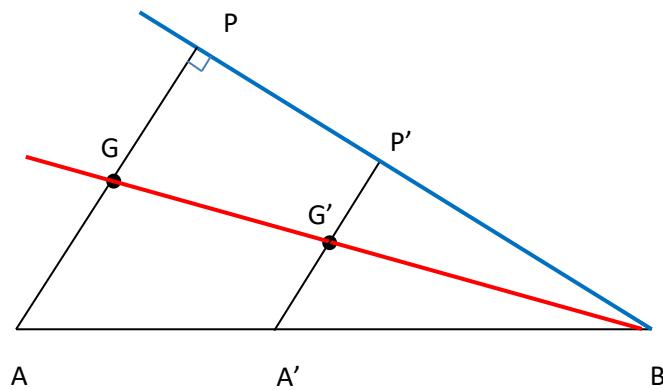
Les ondes se propageant avec une vitesse de groupe sont celles qui sont rendues « visibles » à la surface de l'eau par l'interférence constructive des ondes se propageant avec la vitesse de phase.

- Pour une onde acoustique ( $\omega = a \cdot k$ ), montrer que la vitesse de phase et de groupe sont identiques.

- b. Pour des ondes de surface, trouver l'expression de la vitesse de phase et de groupe en fonction de la longueur d'onde, et montrer que la vitesse de groupe est deux fois plus petite que la vitesse de phase.
- c. Un corps flottant génère un spectre étendu de longueurs d'onde. On considérera dans ce problème uniquement les longueurs d'ondes générant des ondes avec une vitesse de phase inférieure à celle du corps flottant.

On fera d'abord une étude géométrique du problème.

En un instant particulier, pour une position B donnée du canard, tracer sur un schéma trois ondes de Mach (correspondant à trois différentes vitesses de phase, donc à trois différentes longueurs d'onde) : on choisira par exemple des ondes de Mach faisant un angle de  $40^\circ$ ,  $55^\circ$ , et  $70^\circ$  pour fixer les idées (en bleu sur le schéma ci-dessous).



Choisir un point A dans le sillage où se trouvait le canard à un instant antérieur. Pour chacune des trois ondes de Mach, tracer le rayon AP de l'onde circulaire (correspondant à la vitesse de phase) émise par le canard quand il se trouvait en A.

Comme la vitesse de groupe (qui caractérise les ondes « visibles » à la surface) est deux fois plus petite que la vitesse de phase, trouver le point G où se trouvent ces ondes.

Cet exercice peut être recommencé avec un autre point A', donnant un point P' et G'. On voit alors que les points G, G',... se trouvent tous sur une même droite (en rouge sur le schéma).

Cette zone BGG'... est appelée enveloppe (ou onde) de Kelvin.

Montrer que les trois ondes de Kelvin correspondant à vos trois ondes de Mach sont très voisines les unes des autres (avec une pente proche de  $20^\circ$ ).

- d. Avec une analyse géométrique, montrer que ces ondes de Kelvin sont toutes concentrées autour d'une pente de  $19.47^\circ$ .