Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barême : Réponse juste : 0.5 pt ; Justification : 1 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;
Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. **Une onde de Mach :**
   a. est isentrope. VRAI FAUX
   Justification/Commentaire :

   b. a une pente (par rapport à l'écoulement) qui est toujours plus petite qu'une onde de choc oblique pour un même nombre de Mach en amont. VRAI FAUX
   Justification/Commentaire :

   c. est rendue visible à l'œil nu (sans autre instrument) en plaçant du scotch sur les parois. VRAI FAUX
   Justification/Commentaire :

2. **Dans le cas d'un écoulement isentrope :**
   a. quand la température augmente, le volume spécifique augmente. VRAI FAUX
   Justification/Commentaire :

   b. les variations relatives de pression sont plus grandes que les variations relatives de masse volumique (pour un gaz parfait). VRAI FAUX
   Justification/Commentaire :

c. la pression totale est invariante. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

3. Quand un écoulement <u>subsonique</u> entre dans une tuyère convergente-divergente :

a. l'écoulement accélère tout le long. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

b. une onde de choc peut se produire dans la partie divergente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

c. des ondes de Mach peuvent être présentes dans le convergent. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

d. le nombre de Mach le long de la tuyère se calcule en divisant la vitesse de l'écoulement dans la tuyère par la vitesse du son dans le laboratoire à des conditions standard. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

e. le jet sortant de la tuyère forme toujours un sillage en « diamants ». VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

f. le bruit peut remonter l'écoulement uniquement dans le convergent. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

4. Un choc droit dans un gaz parfait :

a. ne fait pas varier la température totale. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

b. ne peut jamais être suivi ou précédé d'un autre choc droit (en 1D). VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

c. engendre une diminution de la pression statique. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

d. se déplace à la vitesse du son de l'air ambiant. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

e. peut être oblique en changeant de référentiel. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

5. Un choc oblique :

a. est moins intense qu'un choc droit pour un même nombre de Mach. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

b. se réfléchit sur une surface plane avec un angle égal à l'angle d'incidence.
VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

c. génère des variations spatiales d’entropie en aval du choc (c’est-à-dire, si l’entropie est uniforme spatialement en amont du choc, elle ne l’est pas en aval). VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

d. n’a qu’une seule solution pour un nombre de Mach donné en amont. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

6. Une onde de détente:

a. est un assemblage d’ondes de Mach. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

b. est isentrope. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

c. peut apparaître dans le jet sortant d'une tuyère convergente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

Barème :

Ex 1: 22 pts ; Ex 2 : 16 pts ; Ex 3 : 16 pts ; Ex 4 : 10 pts

Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués

Jusqu'à 11h15 max

1. **Réflexion de choc (22 points)**

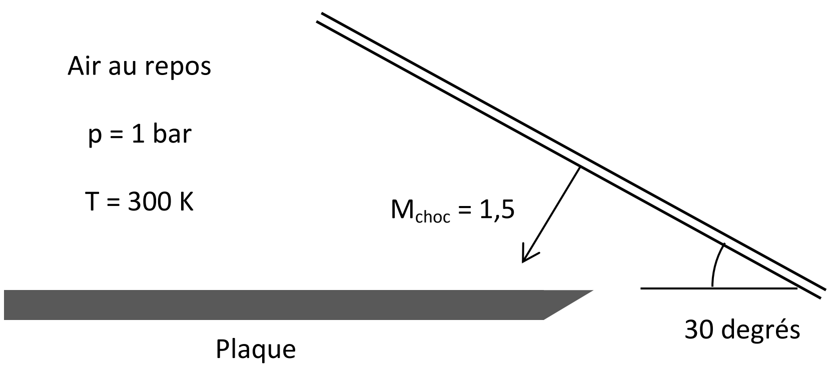
   Un choc droit (généré par une explosion ou autre) d'étendue infinie se déplace dans de l'air au repos (de pression égale à 1 bar et température égale à 300K). Le nombre de Mach du choc (défini comme sa vitesse divisée par la vitesse du son de l'air au repos) est égal à 1,5.

   Le choc intercepte une plaque au repos selon le schéma ci-dessous. La partie du choc interceptant la surface supérieure de la plaque va être « réfléchie ». On ne s'intéressera qu'à la partie supérieure de la plaque (et en particulier on ne regardera pas ce qu'il se passe en bout de plaque). Dans les exercices ci-dessous, on supposera que l'interception a eu lieu et que le point de contact du choc avec la plaque se déplace donc vers la gauche (problème instationnaire).

   a. A l'aide d'un changement approprié de repère (Galiléen), montrer que le problème est équivalent à une configuration stationnaire de « réflexion » de choc oblique avec un écoulement (en amont du choc) parallèle à la plaque et ayant un nombre de Mach égal à $M_1 = 3,0$.

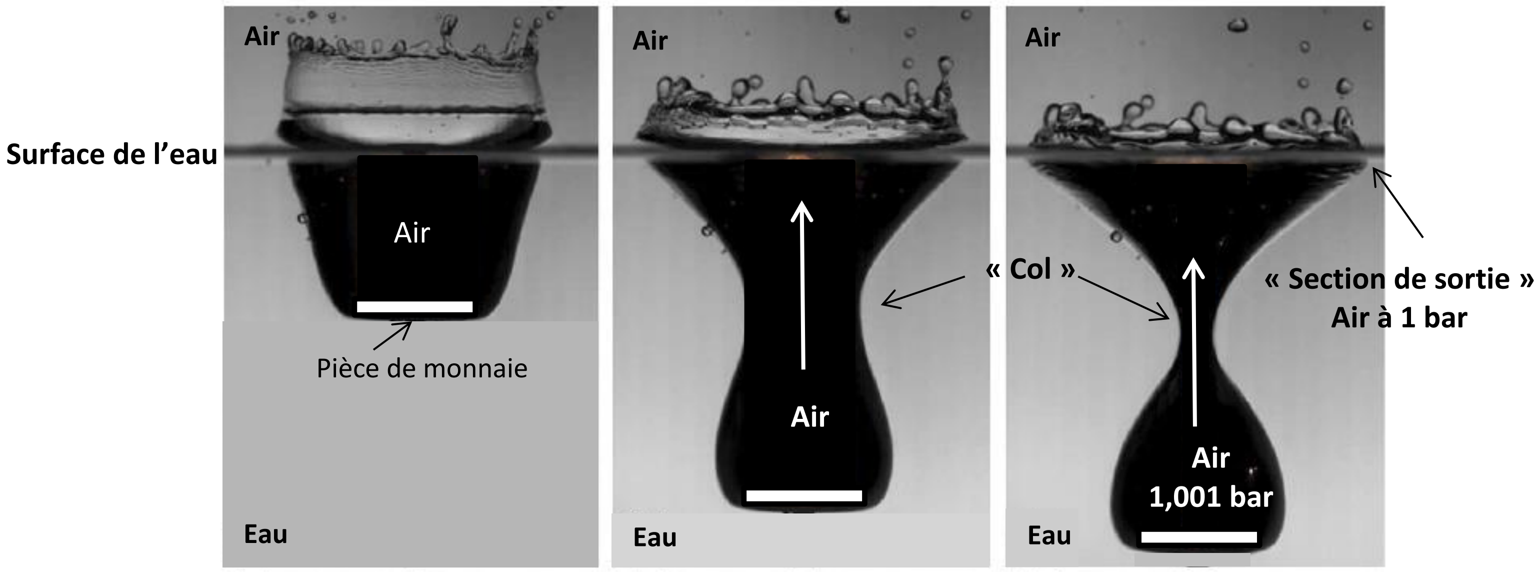
   b. Dans ce nouveau repère, résoudre le problème afin d'évaluer la pression et la vitesse de l'écoulement le long de la plaque en aval du point de contact du choc (et de sa « réflexion »). Des valeurs approximatives (en particulier lors de l'utilisation de graphes et de tables) sont acceptables.

   c. Evaluer la vitesse (et en particulier le sens) de l'écoulement le long de la plaque en aval du point de contact dans le repère originel.



2. Pièce de monnaie qui tombe dans l'eau (16 points)

Quand un objet (caillou, pièce de monnaie) tombe dans l'eau, il entraîne avec lui une cavité d'air dans son sillage (voir schéma ci-dessous) qui se referme progressivement.
Il a été démontré récemment que, à cause de la fermeture rapide de la cavité, l'air dans la cavité se retrouve légèrement comprimé.
En se refermant, la cavité génère un col à travers duquel l'air emprisonné dans la cavité (à une pression supérieure à la pression atmosphérique) tente de s'échapper. En fonction du temps, la section du col diminue et la pression dans la cavité augmente jusqu'à séparation complète de la cavité (qui devient alors une bulle d'air).
Nous nous intéresserons à la fenêtre de temps durant laquelle le col existe et l'écoulement d'air se fait du bas vers le haut, où la pression à la <u>section de sortie</u> (voir schéma) est égale à la pression atmosphérique (prise égale à 1 bar).



a. Il a été démontré (en 2010) que l'écoulement peut devenir sonique au col pour une pression très légèrement supérieure à la pression atmosphérique (on peut prendre 1,001 bar dans la cavité). Expliquer en quelques mots comment cela peut être possible en vue de la faible pression dans la cavité par rapport à la pression de sortie.

b. Evaluer (approximativement) le <u>diamètre du col</u> à partir duquel l'écoulement devient sonique pour un diamètre de section de sortie autour de 2 cm (un peu plus grand que le diamètre de la pièce de monnaie) et une pression de cavité de 1,001 bar.

c. Au fil du temps, la pression dans la cavité augmente (et le col se rétrécit).

   i. Montrer <u>qualitativement</u> que l'écoulement devient alors supersonique au-delà du col et un choc droit se forme dans la partie divergente de la « tuyère ».

   ii. Montrer le détail de la procédure (sans faire de calculs, mais en indiquant les tables et/ou équations) qui permettrait d'évaluer l'aire de sortie à partir des données suivantes : pression dans la cavité, diamètre du col, diamètre du choc (correspondant donc à la position du choc dans le divergent), et la pression de sortie (= 1 bar).

3. Space X Falcon (16 points)

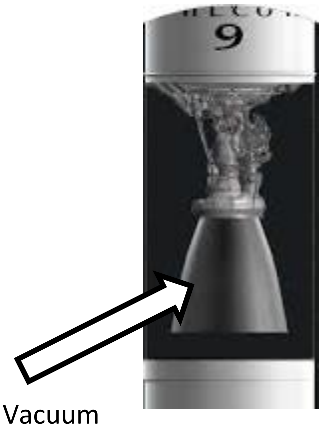
Juste avant l'explosion de la fusée Falcon de Space X ce 28 juin 2015, le véhicule avait atteint une altitude de 45 km.

Pour son 1er étage, la fusée utilise neuf (oui, 9) moteurs « Merlin 1D » (voir photo ci-dessous) fonctionnant à l'oxygène liquide (LOX) et un kérosène pour fusées (RP1). La pression de réservoir est de 97 bar ($9{,}7 \times 10^6$ Pa) et le rapport d'aire (entre la sortie et le col) est de 16. A une altitude de 45 km, la pression atmosphérique est de 149 Pa. La combustion RP1-LOX produit un gaz constitué de vapeur d'eau et de gaz carbonique : dans les exercices ci-dessous, on attribuera à ce gaz un rapport de chaleurs spécifiques constant et égal à 1,3.

a. Indiquer qualitativement pourquoi ce rapport de chaleurs spécifiques n'est pas vraiment justifié.

b. Décrire la morphologie de l'écoulement en sortie de tuyère juste avant l'accident (à 45 km d'altitude) en justifiant la réponse avec des calculs. En particulier, trouver l'angle des gaz à la sortie de la tuyère <u>en supposant un écoulement 2D</u> (comparer avec la photo ci-dessous prise juste avant l'explosion). NB : on peut vérifier que le nombre de Mach de sortie est égal à 4,0032.

c. Sans explosion, le 1er étage aurait dû se détacher et laisser place au deuxième étage propulsé par un seul moteur « Merlin 1D Vacuum » (photo ci-dessous), conçu pour un fonctionnement à haute altitude. Ce moteur a sensiblement les mêmes caractéristiques que le « Merlin 1D », sauf pour le rapport d'aire de 117 entre sortie et col. En vue de la question b., expliquer pourquoi ce rapport de section est <u>plus grand</u> que pour le moteur du 1er étage.



Merlin 1D Vacuum

Merlin 1D

4. Tourbillon potentiel (10 points)

Un tourbillon potentiel peut être décrit par un champ de vitesse avec des lignes de courants circulaires et concentriques, et un module de vitesse égal à $\mathrm{v} = \Gamma/2\pi r$, où r est le rayon et Γ une constante (la *circulation*). L'entropie et l'enthalpie totale sont supposées uniformes (avec une vitesse du son *totale* égale à a_0). Avec un nombre de Mach défini par :

$$M = \frac{\mathrm{v}}{a}$$

où a est la vitesse du son *locale*, montrer que l'on a alors :

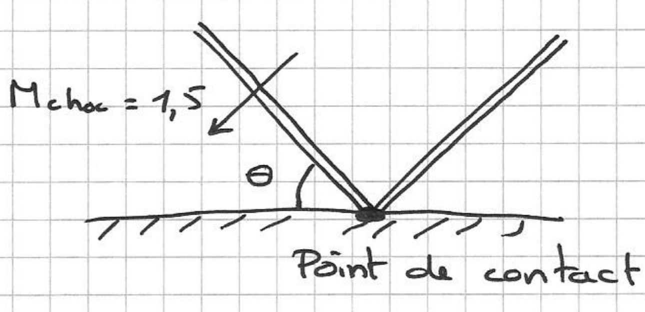
$$r = \frac{\Gamma}{2\pi a_0}\frac{1}{M}\sqrt{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$$

et que, par conséquence, le nombre de Mach M varie en fonction du rayon r selon:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi a_0 r}{\Gamma}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{2}}}$$

Montrer ainsi qu'il existe un rayon minimal $r = r_{\min}$ en dessous duquel le fluide ne peut exister. Trouver (en fonction de $r_{\min}$) le rayon $r = r*$ où l'écoulement est sonique.

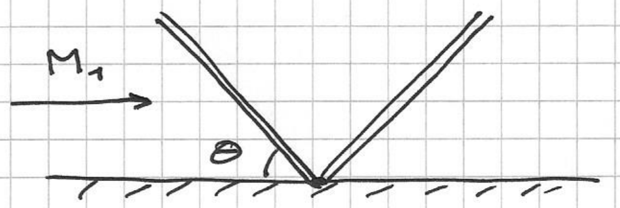
① ⓐ Par simple géométrie, le point de contact se déplace vers la gauche avec un nombre de Mach égal à :



$$M_{pt.contact} = \frac{M_{choc}}{\sin \theta}$$

Avec $\theta = 30°$

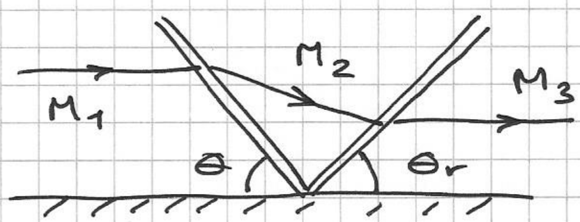
$\longrightarrow \quad M_{pt.\ contact} = 3,0$



Par simple changement de repère, il est alors simple de rendre le point de contact fixe avec un écoulement venant de la gauche ayant pour nombre de Mach :

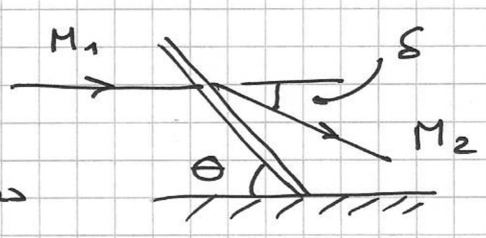
$$M_1 = 3,0$$

ⓑ Ce problème est maintenant identique à un exercice rencontré en classe.



$*$ ① → ②

On peut utiliser les tables/graphes.
Les résultats ci-dessous sont donnés en utilisant les formules.



$$M_{n,1} = M_1 \cdot \sin \theta = 1,5$$

$$M_{t,1} = M_1 \cdot \cos \theta = 2,598076$$

$$P_2/P_1 = 2,4583$$

$$T_2/T_1 = 1,3202$$

$$M_{n,2} = 0,7011$$

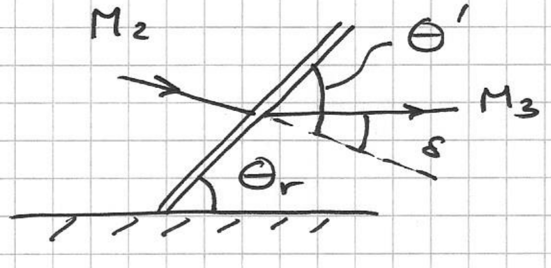
$$M_{t,2} = M_{t,1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 2,2612$$

$$M_2 = \sqrt{M_{n,2}^2 + M_{t,2}^2} = 2{,}3674$$

$$\sin(\theta - \delta) = \frac{M_{n,2}}{M_2} = 0{,}2962$$

$\rightarrow \quad \theta - \delta = 17{,}23°$

$\rightarrow \quad \delta = 12{,}77°$



* ② → ③

A partir de M_2 et δ, on trouve :

$$\theta' = 35{,}28°$$

$$M'_{n,2} = M_2 \sin\theta' = 1{,}3675$$

$$M'_{t,2} = M_2 \cos\theta' = 1{,}9324$$

$$P_3/P_2 = 2{,}015$$

$$T_3/T_2 = 1{,}235$$

$$M_{t,3} = M_{t,2} \sqrt{\frac{T_2}{T_3}} = 1{,}7389$$

$$M_3 = \sqrt{M_{n,3}^2 + M_{t,3}^2} = 1{,}8937$$

$$\theta_r = \theta' - \delta = 22{,}51°$$

Ainsi :

$$P_3 = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot P_1 = \left(\frac{2{,}015}{}\right) \cdot 2{,}4583 \cdot (1 \text{ bar})$$

$\longrightarrow \quad P_3 = 4{,}95$ bar

$$w_3 = M_3 \cdot \sqrt{\gamma r T_3} = M_3 \cdot \sqrt{\gamma r T_1} \sqrt{\frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}}$$

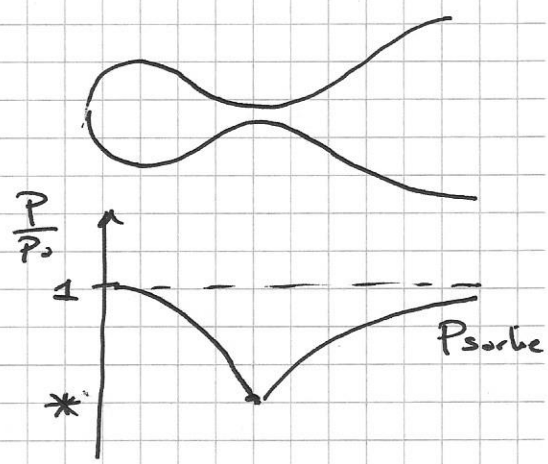
$\longrightarrow \quad w_3 = 839{,}52$ m/s vers la droite.

ⓒ En revenant vers un repère fixe par rapport à la plaque :

$$w_3' = w_3 - w_1 = w_3 - M_1 \cdot \sqrt{\gamma r T_1}$$

$\longrightarrow \quad w_3' = -202{,}04$ m/s vers la gauche.

② ⓐ Il suffit que l'aire de sortie soit assez grande par rapport au col pour que la pression de sortie soit légèrement inférieure à la pression de réservoir (dans la cavité) tout en ayant un col sonique



ⓑ Avec un écoulement isentrope tout le long

$$\frac{p_0}{p_{sortie}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{sortie}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Avec $p_0 = 1{,}001$ bar

$p = 1$ bar

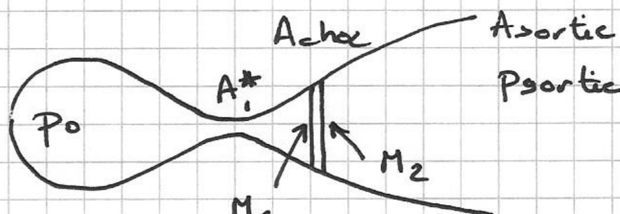
$\rightarrow \quad M_{sortie} = 0{,}03779$

Avec $$\frac{A_{sortie}}{A^*} = \frac{1}{M_{sortie}}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_{sortie}^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{A_{sortie}}{A^*} = 15{,}3269 = \left(\frac{d_{sortie}}{d^*}\right)^2$$

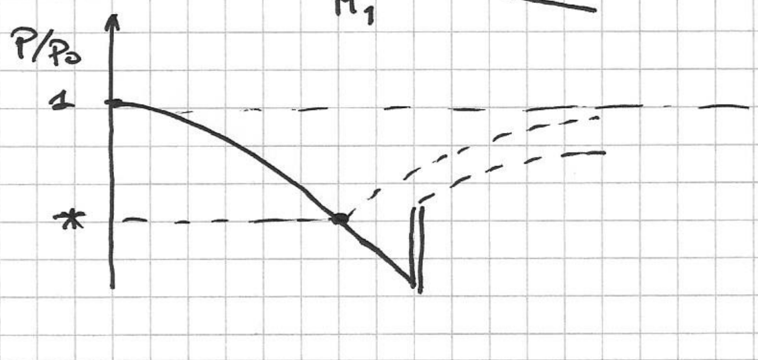
Avec $d_{sortie} = 2$ cm $\rightarrow \quad d^* = 5{,}1$ mm

ⓒ i. Même si la pression de réservoir et le diamètre du col changent, on est dans une situation similaire à celle vue en classe.



ii. M_1, $\frac{P_1}{P_0}$ à partir des relations isentropes et $\frac{A_{choc}}{A^*}$

Puis, M_2, $\frac{P_2}{P_1}$, $\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}}$ à partir des relations pour choc droit.



$A_2^* = A_1^* \frac{P_{0,1}}{P_{0,2}}$

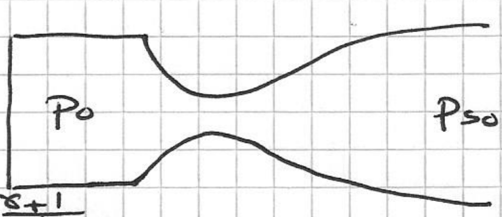
A partir de $P_{sortie}/P_{0,2}$,

$\rightarrow \frac{A_{sortie}}{A_2^*} \rightarrow A_{sortie}$

③ (a) Si on regarde le diagramme $\gamma(T)$ pour l'eau et le gaz carbonique, on remarque de grandes variations pour des températures rencontrées dans la chambre de combustion.

Afin de simplifier les calculs, on prendra : $\gamma \simeq 1,3$

(b) Avec $\frac{A}{A^*} = 16$, on peut vérifier que $M_{sortie} = 4,0032$ satisfait la relation suivante :



$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M_{sortie}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{sortie}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$P_{arrière} = 149$ Pa

Avec : $\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

attention $\gamma = 1,3$!

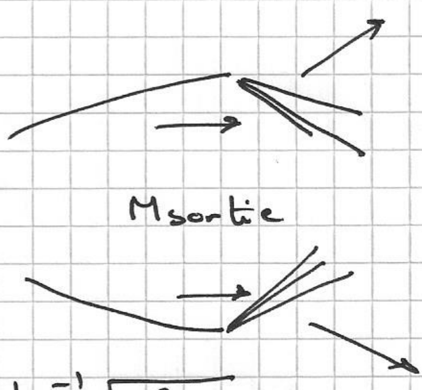
on trouve $P_{sortie} =$ 48'036 Pa

On voit que $P_{sortie} > P_{arrière}$

→ des ondes de détente permettent de détendre l'écoulement

Pour ces nombres de Mach (et comme $\gamma = 1,3$) on ne peut utiliser les tables

→ il nous faut utiliser la fonction de Prandtl-Meyer



$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{M^2-1}$$

$\nu(M_{sortie}) = 75,21°$

Comme l'écoulement est isentrope : $\frac{P_0}{P_{arrière}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{arrière}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

→ $M_{arrière} = 8,9095$

→ $\nu(M_{arrière}) = 117,55°$

→ La déviation est égale à : $\delta = 75,21 - 117,55 = -42,34°$

(c) Un rapport d'aire $\frac{A_{sortie}}{A^*} = 117$ permet de :

- augmenter le nombre de Mach de sortie et donc la poussée (il n'y a qu'un seul moteur)
- diminuer la pression de sortie afin de se rapprocher de la pression arrière et être proche du point de fonctionnement.

(4) $$M = \frac{v}{a} = \frac{\Gamma/2\pi r}{a}$$

Or : $$\frac{T_0}{T} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\rightarrow \quad r = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{M} \frac{1}{a} = \frac{\Gamma}{2\pi a_0} \frac{1}{M} \sqrt{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

$$\rightarrow \quad r^2 = \frac{\Gamma^2}{(2\pi a_0)^2} \frac{1}{M^2} \left(1+\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

$$M^2 \left(\frac{2\pi a_0 r}{\Gamma}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$M^2 = \frac{1}{\left(\frac{2\pi a_0 r}{\Gamma}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi a_0 r}{\Gamma}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{2}}}$$

le rayon minimal se produit quand $M \rightarrow \infty$

avec $$\left(\frac{2\pi a_0 r_{min}}{\Gamma}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad r_{min} = \frac{\Gamma}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Il faut évidemment que $r > r_{min}$, sinon la racine carré ne peut être évaluée.

Avec $M = 1 \rightarrow$ $$\left(\frac{2\pi a_0 r^*}{\Gamma}\right)^2 - \frac{\gamma-1}{2} = 1$$

$$r^* = \frac{\Gamma}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

$$r^* = r_{min} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$