

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barème : Réponse juste : 0.5 pt ; Justification : 1 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. Une onde de Mach :

- a. existe en écoulement subsonique et en écoulement supersonique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. a une pente qui diminue avec une augmentation du nombre de Mach. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. est un outil mathématique et n'existe pas vraiment dans la nature. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. l'entropie a la même valeur dans tout l'écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. le nombre de Mach maximal est toujours inférieur à 1. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. quand la température diminue, la pression augmente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

2. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :

- a. l'écoulement peut devenir supersonique dans la partie convergente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- b. l'écoulement est supersonique dans toute la partie divergente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- c. un choc droit peut apparaître dans le convergent. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- d. le nombre de Mach peut être supérieur à 1 dans le convergent. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- e. le jet sortant de la tuyère a toujours une morphologie divergente. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- f. le nombre de Mach au col est toujours égal à 1. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

3. Un choc droit dans un gaz parfait :

- a. est un choc de forme rectiligne pour toutes directions de l'écoulement par rapport au choc. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. n'apparaît que dans un écoulement supersonique relatif au choc. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. engendre une augmentation de la pression totale. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. est toujours stationnaire. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. induit une augmentation d'entropie. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

4. Un choc oblique :

- a. génère toujours un écoulement subsonique en aval. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est toujours attaché au bord d'attaque d'un objet se déplaçant à une vitesse supersonique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. est un choc droit dans un repère se déplaçant le long du choc. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. obéit exactement aux mêmes relations qu'un choc droit si le nombre de Mach en amont est le même. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

5. Une onde de détente:

- a. génère une diminution de la pression totale. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. engendre une accélération de l'écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. peut apparaître dans le jet sortant d'une tuyère de De Laval. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

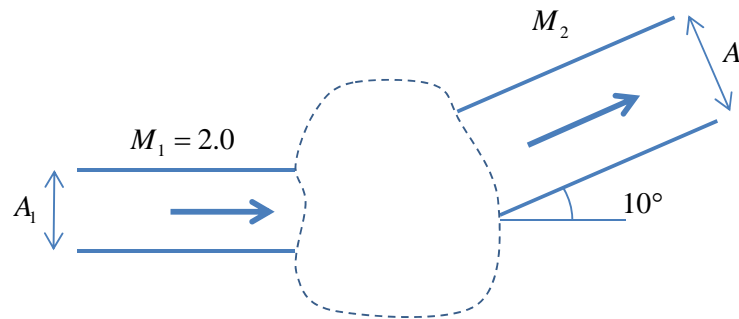
Barème : Exercice 1 : 27 pts ; Exercice 2 : 7 pts ; Exercice 3 : 30 pts ;

Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués

Jusqu'à 11h15 max

- Un gaz parfait (avec un rapport de chaleurs spécifiques égal à 1.4) s'écoule dans une conduite (bi-dimensionnelle) avec des conditions uniformes (état 1, pression p_1 , entropie s_1) et un nombre de Mach égal à $M_1 = 2.0$. L'objectif est de dévier l'écoulement d'un angle de 10 degrés et de porter le gaz à un état 2 (avec un nombre de Mach M_2 , pression p_2 , et une entropie s_2).



On désire concevoir différents « coudes » qui permettent de dévier cet écoulement pour les cas suivants :

- $M_2 > M_1$ $s_2 = s_1$
- $M_2 < M_1$ $s_2 = s_1$
- $M_2 < M_1$ $s_2 > s_1$

Pour chaque cas, indiquer qualitativement la morphologie du coude (en traçant quelques ondes si nécessaire), et évaluer le nombre de Mach M_2 , le rapport de pression p_2/p_1 , ainsi que le rapport de section A_2/A_1 .

(remarque : on ne vous demande pas d'évaluer en détail l'écoulement à l'intérieur du coude; en particulier, pour a. et b., une description qualitative suffit et il n'est pas nécessaire de faire une analyse comme dans le chapitre 10, car dans cet exercice l'on ne s'intéresse qu'aux conditions en amont et en aval)

2. Un écoulement sonique (nombre de Mach égal à 1) d'un gaz parfait est détendu dans le vide (à la sortie d'une tuyère convergente se trouvant dans l'espace, par exemple).
- a. Montrer que l'écoulement à la sortie est dévié d'un angle (en degrés) égal à :

$$90^\circ \times \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

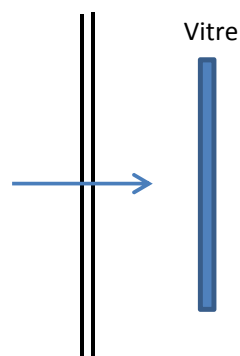
- b. Evaluer cet angle pour $\gamma = 1.3$

3. Le 15 février 2013, une météorite s'est abattue sur Chelyabinsk (Russie). Une étude détaillée de la météorite est apparue récemment sur les revues « Nature » et « Science », avec une estimation de l'énergie relâchée par la désintégration de la météorite à partir de l'onde de choc générée.

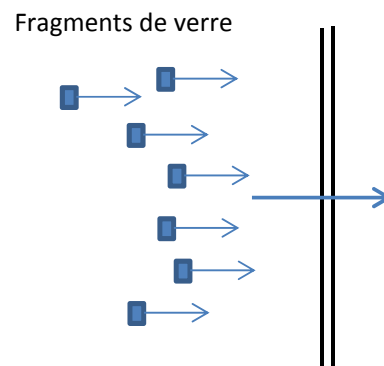


Afin d'estimer l'intensité de l'onde de choc, les scientifiques se sont appuyés sur des séquences vidéo (sur youtube !) montrant l'éclat des vitres des fenêtres, et en particulier la vitesse des fragments de verre dès la traversée de l'onde de choc.

On fera l'hypothèse que, dès rupture de la vitre, les (petits) fragments sont accélérés par l'onde de choc quasi-instantanément et acquièrent la vitesse de l'écoulement derrière l'onde de choc. On supposera aussi que l'onde de choc n'est pas perturbée par la vitre.



Avant l'impact



Après l'impact

A partir de la vitesse des fragments de verre, la surpression de l'onde de choc a été estimée à 3.2 kPa au niveau de Chelyabinsk (ce qui a permis de donner une estimation de l'énergie dégagée par la météorite avec une connaissance de sa distance).

Dans cet exercice, la procédure inverse sera suivie : à partir de la valeur de surpression (3.2 kPa), la vitesse des fragments sera estimée.

On suppose que les conditions atmosphériques à Chelyabinsk étaient de 1 atm (101'325 Pa) et de -10 degrés Celsius (moins dix...).

- a. Montrer que le module de la vitesse des fragments dans un référentiel fixe par rapport au sol est égal à la valeur absolue de $[w_n]$, où w_n représente la vitesse de l'écoulement de part et d'autre du choc dans un référentiel fixe par rapport au choc, et les crochets ont leur définition usuelle : $[x]=x_2-x_1$ (où les indices 1 et 2 représentent l'amont et aval du choc respectivement).
- b. En classe, la formule suivante a été énoncée sans démonstration (équation F.81 sur le formulaire) :

$$[w_n]^2 = -[p][v]$$

où p est la pression et v le volume spécifique. Démontrer cette relation à partir des relations pour un choc droit.

- c. En utilisant les tables (interpolation nécessaire !), trouver la vitesse des fragments.
- d. Comme vous avez pu le constater sur les tables, l'intensité du choc est faible. Pour un choc faible (quasi-isentropique), il est possible d'utiliser un développement de Taylor :

$$[v] = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s [p] + \dots$$

Montrer ainsi que :

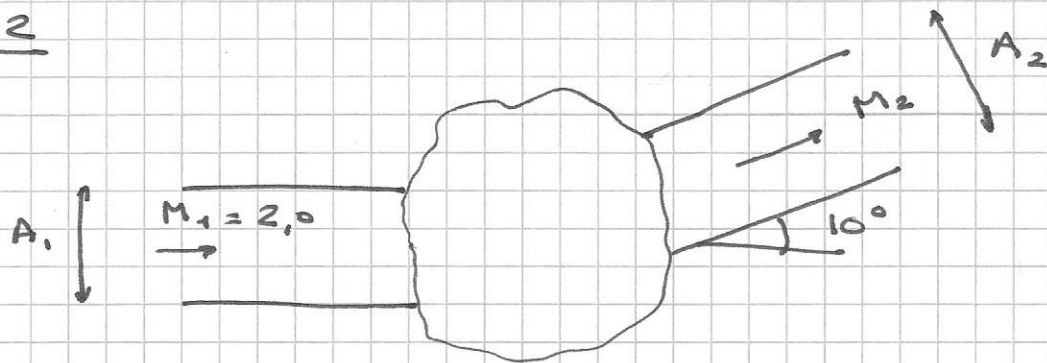
$$[w_n] = - \frac{[p]}{\rho_1 a_1}$$

où ρ est la masse volumique, a la vitesse du son, et l'indice 1 représente les conditions ambiantes (c'est à dire en amont du choc).

- e. Ré-évaluer la vitesse des fragments avec cette dernière relation, et comparer avec la valeur obtenue en c. avec les tables.
(cette valeur est très proche de la valeur mesurée par les scientifiques !)

Partie 2

①

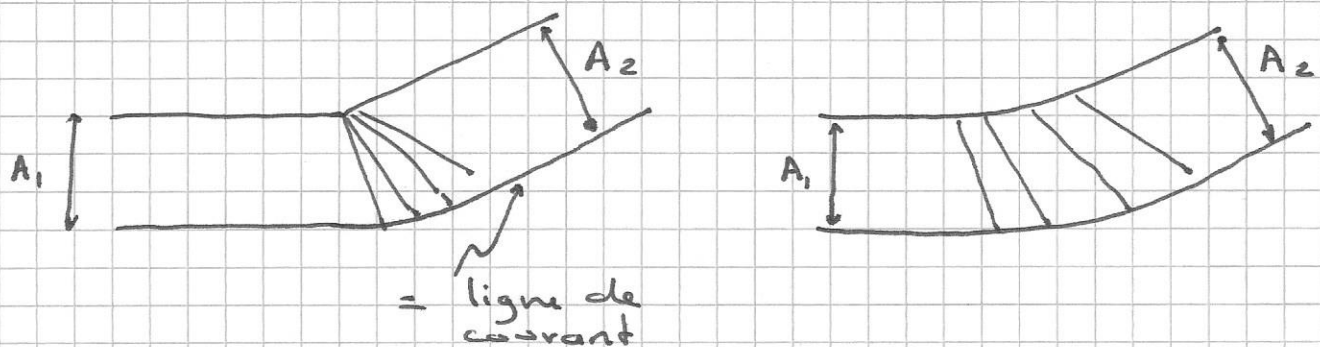


② a) $M_2 > M_1$, $S_2 = S_1$

Il s'agit d'un écoulement de Prandtl-Meyer (isentrope) avec détente (car $M_2 > M_1$)

les deux configurations suivantes fournissent la même solution.

La paroi inférieure est choisie comme une ligne de courant. Elle peut être déterminée selon les techniques du Chapitre 10 du cours, mais ceci n'est pas demandé dans cet exercice.



La fonction de Prandtl-Meyer pour $M_1 = 2,0$ se trouve sur les tables ou avec la relation F.105 sur le formulaire :

$$\nu_1 (M_1 = 2,0) = 26,3798^\circ$$

En utilisant l'angle de déflexion (-10°), on trouve la fonction de Prandtl-Meyer pour M_2 :

$$\begin{aligned} \nu_2 (M_2) &= \nu_1 (M_1) - \delta \quad \text{avec} \quad \delta = -10^\circ \\ &= 26,3798^\circ - (-10^\circ) \end{aligned}$$

$$\nu_2 (M_2) = 36,3798^\circ$$

Par interpolation sur les tables de Prandtl-Meyer ou par évaluation numérique à partir de la fonction de Prandtl-Meyer, on trouve :

$$M_2 = 2,3849$$

En utilisant les tables pour les écoulements isentropes ou les formules correspondantes, on trouve alors :

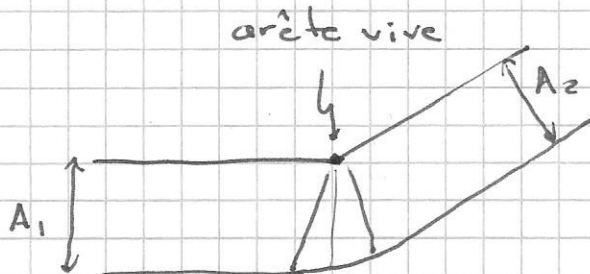
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} = \frac{0,0700}{0,1278} \quad \begin{matrix} \nearrow M_2 = 2,3849 \\ \nwarrow M_1 = 2,0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 0,5479$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2/A^*}{A_1/A^*} = \frac{2,3699}{1,6875} = 1,4044$$

(b) $M_2 < M_1$, $S_2 = S_1$

La situation est similaire à la précédente (écoulement de Prandtl-Meyer), mais il s'agit maintenant d'une compression isentrope.



Comme pour (a), on peut avoir une géométrie avec arête vive ou une géométrie avec courbure progressive.

A partir de (a), pour $M_1 = 2,0$: $\nu_1(M_1) = 26,3798^\circ$

$$\Rightarrow \nu_2(M_2) = \nu_1(M_1) - \delta \quad \text{avec} \quad \delta = +10^\circ$$

$$\Rightarrow v_2 (M_2) = 16,3738^\circ$$

Avec la procédure de (a), on trouve :

$$M_2 = 1,6514$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} = \frac{0,2179}{0,1278} \Rightarrow$$

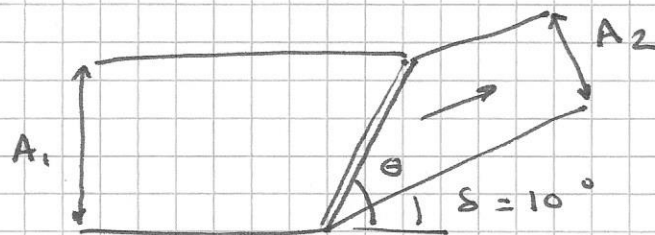
$$\frac{P_2}{P_1} = 1,7050$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2/A^*}{A_1/A^*} = \frac{1,2935}{1,6875} \Rightarrow$$

$$\frac{A_2}{A_1} = 0,7665$$

$$(c) \quad M_2 < M_1, \quad s_2 > s_1$$

La déviation se fait à travers une onde de choc. Afin d'éviter des réflexions d'onde, la paroi supérieure doit être conçue de sorte que l'onde générée sur la partie inférieure viennent intersecter l'arête vive de la paroi supérieure.



Contrairement aux parties (a) et (b), ici l'écoulement n'est pas isentrope.

Il s'agit d'utiliser les relations pour ondes de choc obliques.

L'angle θ du choc peut être trouvé à partir du diagramme pour ondes de chocs obliques ou analytiquement à partir de :

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2} \quad F.102$$

$$\text{avec } \delta = 10^\circ \text{ et } M_1 = 2,0$$

La valeur exacte (pour la solution faible) est:

$$\Theta = 39,31^\circ$$

le nombre de Mach normal au choc $M_{n,1}$ se trouve à partir de:

$$\begin{aligned} M_{n,1} &= M_1 \cdot \sin \Theta \\ &= (2,0) \cdot \sin (39,31^\circ) \end{aligned}$$

$$M_{n,1} = 1,267$$

A partir des tables pour ondes de chocs droits (ou des formules), on trouve:

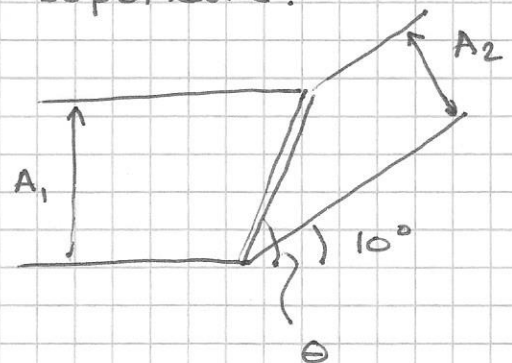
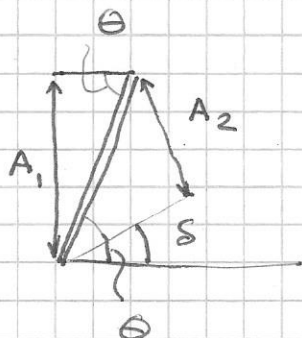
F. 97

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = 1,706}$$

$$M_{n,2} = 0,803$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\Theta - \delta)} \rightarrow \boxed{M_2 = 1,641}$$

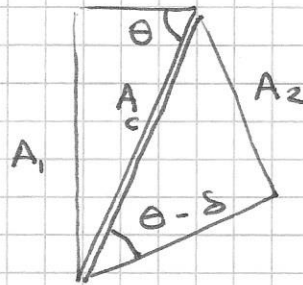
Pour trouver le rapport des aires, la méthode la plus simple est d'utiliser la géométrie de l'écoulement, en particulier le fait que l'onde de choc oblique doit atteindre l'arête vive de la paroi supérieure.



Par géométrie :

$$\sin \theta = \frac{A_1}{A_c}$$

$$\sin (\theta - \delta) = \frac{A_2}{A_c}$$



A_c : aire du choc

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sin (\theta - \delta)}{\sin \theta} \rightarrow \boxed{\frac{A_2}{A_1} = 0,77}$$

Une autre manière de trouver le résultat est d'introduire A^* avant et après le choc.

On utilise pour cela la relation F.94

$$P_{0,1} A_1^* = P_{0,2} A_2^*$$

$$\rightarrow \frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{1}{\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}}}$$

$$\text{Or, avec } M_{n,1} = 1,267, \text{ on trouve : } \frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = 0,9846$$

$$\rightarrow \frac{A_2^*}{A_1^*} = 1,0156$$

On peut alors écrire :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_2^*} \cdot \frac{A_2^*}{A_1^*} \cdot \frac{1}{A_1/A_1^*}$$

$$\text{Pour } M_1 = 2,0 \rightarrow \frac{A_1}{A_1^*} = 1,6875$$

$$M_2 = 1,641 \rightarrow \frac{A_2}{A_2^*} = 1,2836$$

$$\rightarrow \frac{A_2}{A_1} = (1,2836) (1,0156) \frac{1}{1,6875} \rightarrow \boxed{\frac{A_2}{A_1} = 0,77}$$

Une manière plus directe de trouver le résultat est d'utiliser la conservation de masse :

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

Or : $w_{n,1} = u_1 \cdot \sin \Theta$

$$w_{n,2} = u_2 \cdot \sin (\Theta - \delta)$$

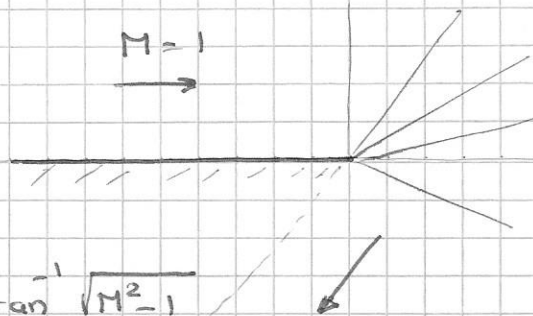
$$\rightarrow \frac{\rho_1 \cdot w_{n,1}}{\sin \Theta} \cdot A_1 = \frac{\rho_2 \cdot w_{n,2}}{\sin (\Theta - \delta)} \cdot A_2$$

Or : $\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}$ (choc droit)

$$\rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sin (\Theta - \delta)}{\sin \Theta}$$

comme obtenu précédemment.

② On part de la relation de Prandtl-Meyer :



$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1}$$

La fonction de Prandtl-Meyer correspond à l'angle de déviation de l'écoulement à partir d'un écoulement $M=1$ vers un écoulement de nombre de Mach arbitraire M .

Pour une détente dans le vide ($p=0$), la relation isentrope :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

nous indique que le nombre de Mach M doit tendre vers l'infini.

Quand $M \rightarrow \infty$:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \tan^{-1} M = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \tan^{-1} M = \frac{\pi}{2}$$

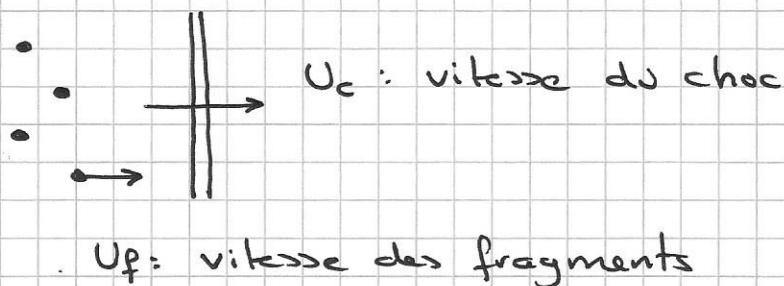
Donc, en degrés :

$$\nu(M \rightarrow \infty) = 90^\circ \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

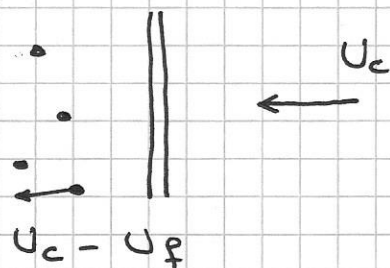
Pour $\gamma = 1,3$, on trouve :

$$\boxed{\nu = 159,2^\circ}$$

③ a) Dans un repère fixe par rapport au sol :



Dans un repère fixe par rapport au choc :



Avec la notation usuelle : $w_{n,1} = U_c$

$$w_{n,2} = U_c - U_f$$

(avec le choix $w_{n,1} > 0$, $w_{n,2} > 0$)

$$\Rightarrow [w_n] = w_{n,2} - w_{n,1} = (U_c - U_f) - U_c$$

$$[w_n] = -U_f$$

$$\rightarrow \boxed{|[w_n]| = U_f} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

⑥ b) Il existe plusieurs manières d'arriver au résultat demandé.

On part de la relation de conservation de masse :

$$\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}$$

d'où on tire les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1 w_{n,1}^2 = \rho_2 w_{n,1} w_{n,2} \\ \rho_2 w_{n,2}^2 = \rho_1 w_{n,1} w_{n,2} \end{cases}$$

On utilise ensuite la relation de conservation de quantité de mouvement pour un choc droit :

$$P_1 + \rho_1 \omega_{n,1}^2 = P_2 + \rho_2 \omega_{n,2}^2$$

Avec les relations obtenues précédemment, on a alors :

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \rho_1 \omega_{n,1}^2 - \rho_2 \omega_{n,2}^2 \\ &= \rho_2 \omega_{n,1} \omega_{n,2} - \rho_1 \omega_{n,1} \omega_{n,2} \\ &= \omega_{n,1} \omega_{n,2} (\rho_2 - \rho_1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_{n,1} \omega_{n,2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}} \quad \text{F.76}$$

(qui est la relation F.76)

On multiplie cette dernière relation par $\rho_1 \rho_2$:

$$\rho_1 \omega_{n,1} \rho_2 \omega_{n,2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1 \rho_2$$

Or : $\rho_1 \omega_{n,1} = \rho_2 \omega_{n,2}$, qu'on insère séparément

$$\rightarrow (\rho_1 \omega_{n,1})^2 = (\rho_2 \omega_{n,2})^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1 \rho_2$$

En prenant chaque relation séparément :

$$(\rho_1 \omega_{n,1})^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1 \rho_2 \rightarrow \omega_{n,1}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

De même, on obtient : $\omega_{n,2}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$

De plus, avec F.76 : $\omega_{n,1} \cdot \omega_{n,2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}$

Avec $[\omega_n]^2 = (\omega_{n,2} - \omega_{n,1})^2 = \omega_{n,2}^2 - 2 \omega_{n,1} \cdot \omega_{n,2} + \omega_{n,1}^2$

$$\begin{aligned}
\rightarrow [\omega_n]^2 &= \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} - 2 \right) \\
&= \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_2^2 + p_1^2 - 2p_1 p_2}{p_1 p_2} \\
&= \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{(p_2 - p_1)^2}{p_1 p_2} \\
&= (p_2 - p_1) \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} \\
&= (p_2 - p_1) \cdot \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \\
&= - (p_2 - p_1) (v_2 - v_1)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{[\omega_n]^2 = - [p] \cdot [v]} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

③ Ce jour là à Chelyabinsk :

$$p_1 = 101'325 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 263 \text{ K}$$

$$\rightarrow \rho_1 = \frac{p_1}{r T_1} \quad \text{avec } r = 287 \text{ J/kg.K}$$

$$\rho_1 = 1,342 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{la surpression : } p_2 - p_1 = [p] = 3'200 \text{ Pa}$$

$$\rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} + 1 = \frac{3'200}{101'325} + 1 = 1,0316$$

A partir des tables pour onde de choc droit ($\delta = 1,4$) avec interpolation :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1,0224$$

$$\text{Or : } v_2 - v_1 = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{1}{\rho_2/\rho_1} - 1 \right)$$

$$\rightarrow [v] = -0,01632 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [\omega_n]^2 &= -[p] \cdot [v] \\ &= - (3'200) (-0,01632) = 52,23 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{[\omega_n] = -7,227 \text{ m/s}}$$

Attention: ne pas oublier le signe \ominus

La vitesse des fragments est donc de 7,227 m/s

(d) Pour un choc faible :

$$[v] = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{s,1} [p] + \dots$$

$$\text{Avec } v = \frac{1}{\rho} \rightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} \cdot d\rho$$

$$\rightarrow [v] = -\frac{1}{\rho_1^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,1}} \cdot [p]$$

$$\text{Or : } a_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,1}$$

$$\rightarrow [v] = -\frac{[p]}{\rho_1^2 \cdot a_1^2}$$

Avec :

$$[\omega_n]^2 = - [P] \cdot [v]$$

$$\rightarrow [\omega_n]^2 = - [P] \cdot \frac{(-[P])}{\rho_1^2 a_1^2} = \frac{[P]^2}{\rho_1^2 a_1^2}$$

$$\rightarrow \boxed{[\omega_n] = - \frac{[P]}{\rho_1 \cdot a_1}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

ne pas oublier le signe $(-)$
car $[\omega_n] < 0$ alors que $[P] > 0$

e) vitesse du son : $a_1 = \sqrt{\gamma r T_1}$
 $= [(1,4)(287)(263)]^{1/2}$

$$\rightarrow a_1 = 325,07 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow [\omega_n] = - \frac{3'200}{(1,342)(325,07)}$$

$$\boxed{[\omega_n] = - 7,335 \text{ m/s}}$$

Comme il s'agit d'un choc de faible intensité,

$$\left(\frac{P_2}{P_1} = 1,0316 \right)$$

cette dernière analyse donne une valeur très proche de la valeur réelle.

Remarque : pour la partie (b), il est possible d'arriver autrement au résultat en utilisant des relations que l'on suppose connues (formulaire)

Exemple 1 : on part de F.76

$$w_{n,1} \cdot w_{n,2} = \frac{[P]}{[\rho]} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

Avec conservation de masse : $\rho_1 w_{n,1} = \rho_2 w_{n,2}$

$$\rightarrow w_{n,1}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$w_{n,2}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Puis : $[w_n]^2 = (w_{n,2} - w_{n,1})^2 = w_{n,2}^2 + w_{n,1}^2 - 2w_{n,1} \cdot w_{n,2}$
et on arrive au résultat désiré en quelques lignes.

Exemple 2 : on part de F.82 (relation Rankine-Hugoniot)

$$h_2 - h_1 = \frac{P_2 - P_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Avec F.75 : $h_2 - h_1 = -\frac{1}{2} (w_{n,2}^2 - w_{n,1}^2)$

$$\rightarrow w_{n,2}^2 - w_{n,1}^2 = - (P_2 - P_1) \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}$$

on multiplie par $(\rho_1 \rho_2)^2$ et on utilise la conservation de masse 2 fois :

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2) (\rho_1^2 w_{n,1}^2) = - (P_2 - P_1) (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 \rho_2)$$

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2) (\rho_2^2 w_{n,2}^2) = - (P_2 - P_1) (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 \rho_2)$$

$$w_{n,1}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$w_{n,2}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

et on continue comme précédemment.