

Exercice 9.11.61

Soit $H(z) = \frac{z + 0,7}{(z-1)(z-0,4)} \cdot 0,4$

$h = 1 \text{ [s]}$

- Calculez $H'(w)$
- Tracer $H'(j\omega)$ dans un diagramme de Bode asymptotique.
- Déterminez un régulateur discret avec les spécifications:
 - pas de statisme
 - $\varphi = 60^\circ$
 - Bande passante en BT $0,3 \text{ [rad/s]}$.

corrigé plus complet que celui du livre avec quelques variantes pour être exhaustif par rapport à la donnée.

Remarque: On distingue un effet intégrateur dans le système à régler $H(z)$ car il y a un pôle en $z=1$. Il n'est donc pas nécessaire d'en rajouter un pour avoir aucun statisme.

$H'(w):$

Il faut remplacer z par $z = \frac{1 + w \frac{h}{2}}{1 - w \frac{h}{2}}$ avec $h = 1$, cela donne

$$z = \frac{1 + w \frac{1}{2}}{1 - w \frac{1}{2}} = \frac{2+w}{2-w}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } H'(w) &= \frac{0,4 \left(\frac{2+w}{2-w} + 0,7 \right)}{\left(\frac{2+w}{2-w} - 1 \right) \left(\frac{2+w}{2-w} - 0,4 \right)} = \frac{0,4 (2+w + 0,7(2-w))}{(2+w - 2-w)(2+w - 0,4(2-w))} \\
 &= \frac{0,4 (3,4 + 0,3w)}{2w (1,2 + 1,4w)} \\
 &= \frac{0,2/1,4 (6,8 + (0,6-3,4)w - 0,3w^2)}{w (w + \frac{1,2}{1,4})} \quad \text{on retrouve l'intégrateur!}
 \end{aligned}$$

$$H'(w) = \frac{-0,04285 w^2 - 0,4 w + 0,9714}{w (w + 0,857)}$$

Comme on a un intégrateur, pas de statisme à l'accroissement.

Diagramme de Bode asymptotique pour le module:

calculons les pôles et les zéros

pôles : $w=0$ et $w=-0,857$

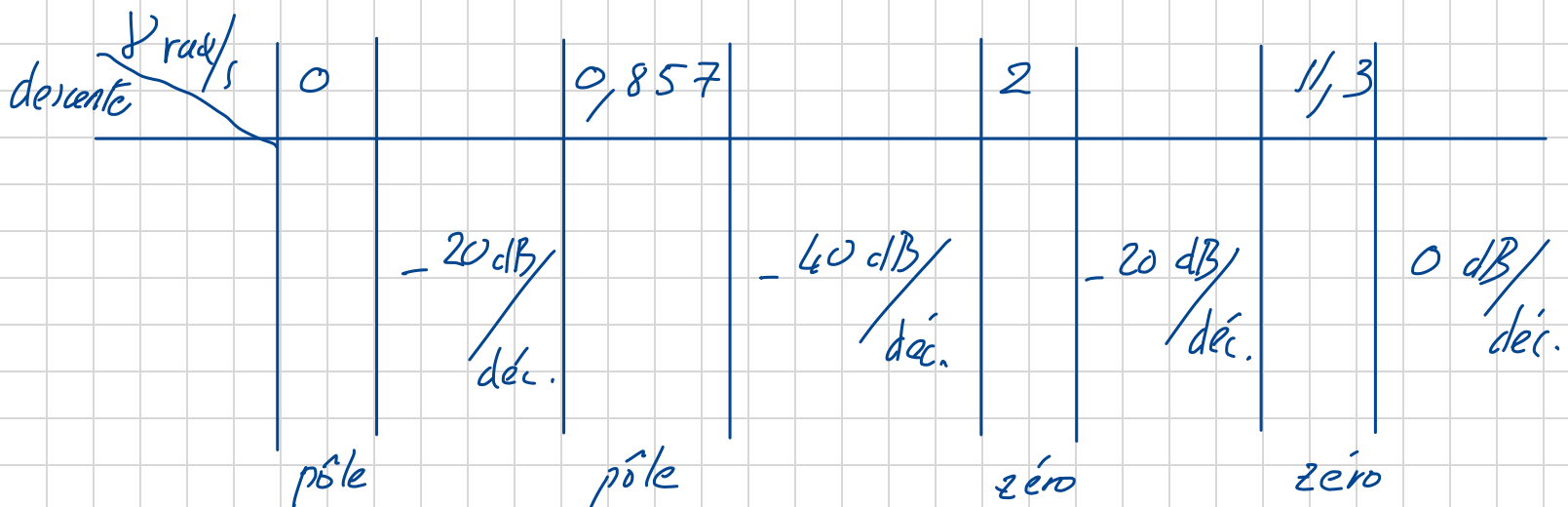
zéros : $-0,04285 w^2 - 0,4 w + 0,9714 = 0$

$$w = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,4^2 + 4 \cdot 0,04285 \cdot 0,9714}}{-0,0857}$$

$$\frac{0,4 \pm 0,5714}{-0,0857} \rightarrow -11,33 \quad \rightarrow +2$$

(zéro à non-minimum de phase)

on classe les pôles et zéros par module croissant:



Il faut calculer le départ, la valeur $H'(0,1)$

Sur le papier, on part de 0,1 puis 1 puis 10 puis 100 comme décades représentables (cf. feuille suivante). Tout à gauche on a 0,1 [rad/s], le point de départ.

Remarque: 0 est situé à $-\infty$ en échelle logarithmique! négligeable

$$20 \log_{10} \left| \frac{-0,04285j + 0,12}{0,1j \cdot (0,1j + 0,857)} - 0,401j + 0,9714 \right|$$

$$= 20 \log_{10} \left(\sqrt{(0,9714)^2 + 0,04^2} \right) - 20 \log_{10}(0,1) - 20 \log_{10}(\sqrt{0,1^2 + 0,857^2})$$

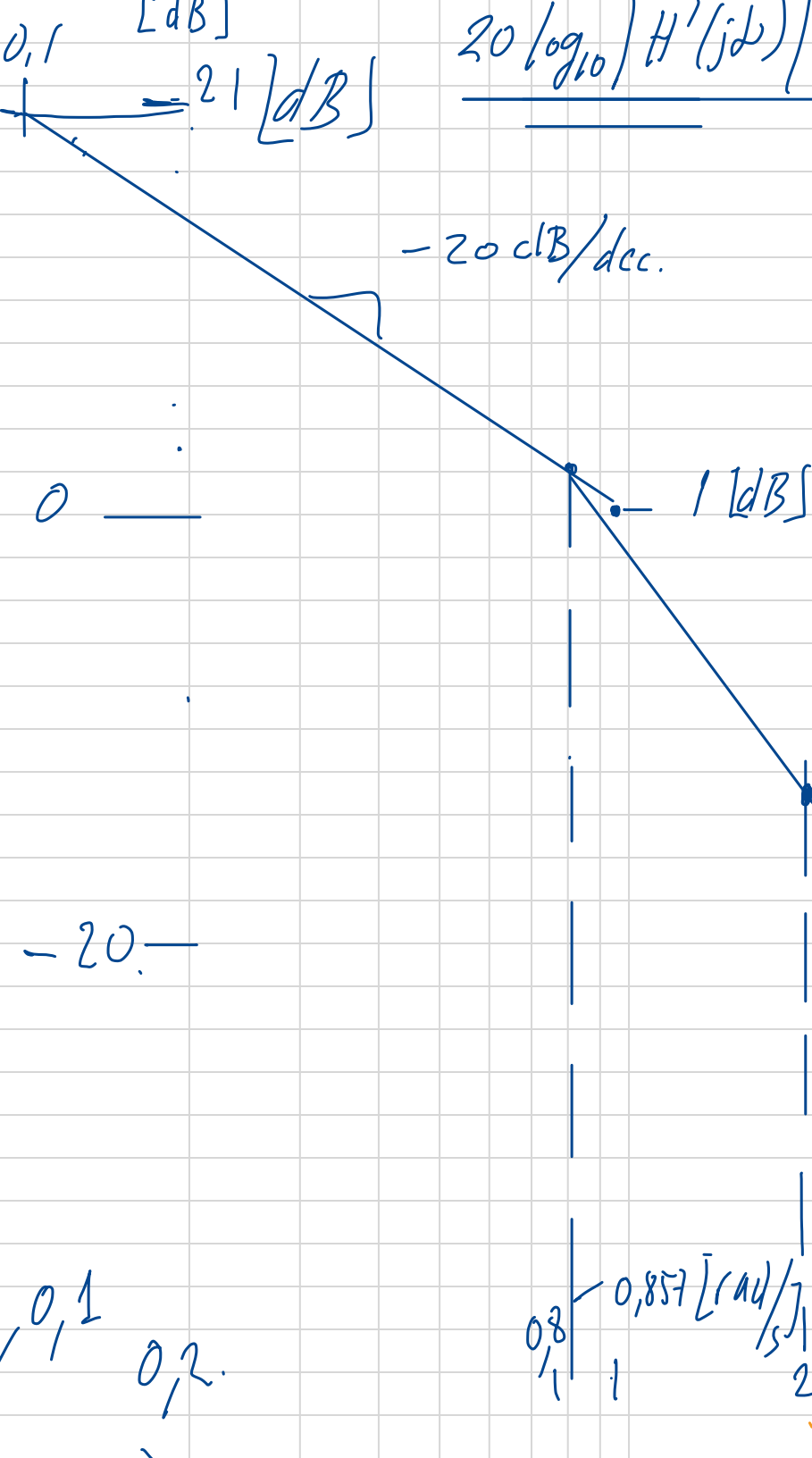
$$= -0,245 + 20 + 1,282 = \underline{\underline{21 \text{ [dB]}}}$$

Calcul du nombre de décades qui sépare

0,1 de 0,857 [rad/s].

$$\log_{10}(0,857) - \log_{10}(0,1) = -0,06702 + 1$$

$$= 0,93$$



toute cette
 partie peut
 être négligé
 dans le dessin
 car

- 1° gain petit
- 2° frop de distorsion entre ω et ω_c .

pour la valeur
 asymptotique
 $\omega \rightarrow \infty$
 seuls les coefficients
 cleuant, ω^2
 dominant.

$$20 \log_{10} (0.0428) = -27.36 \text{ [dB]}$$

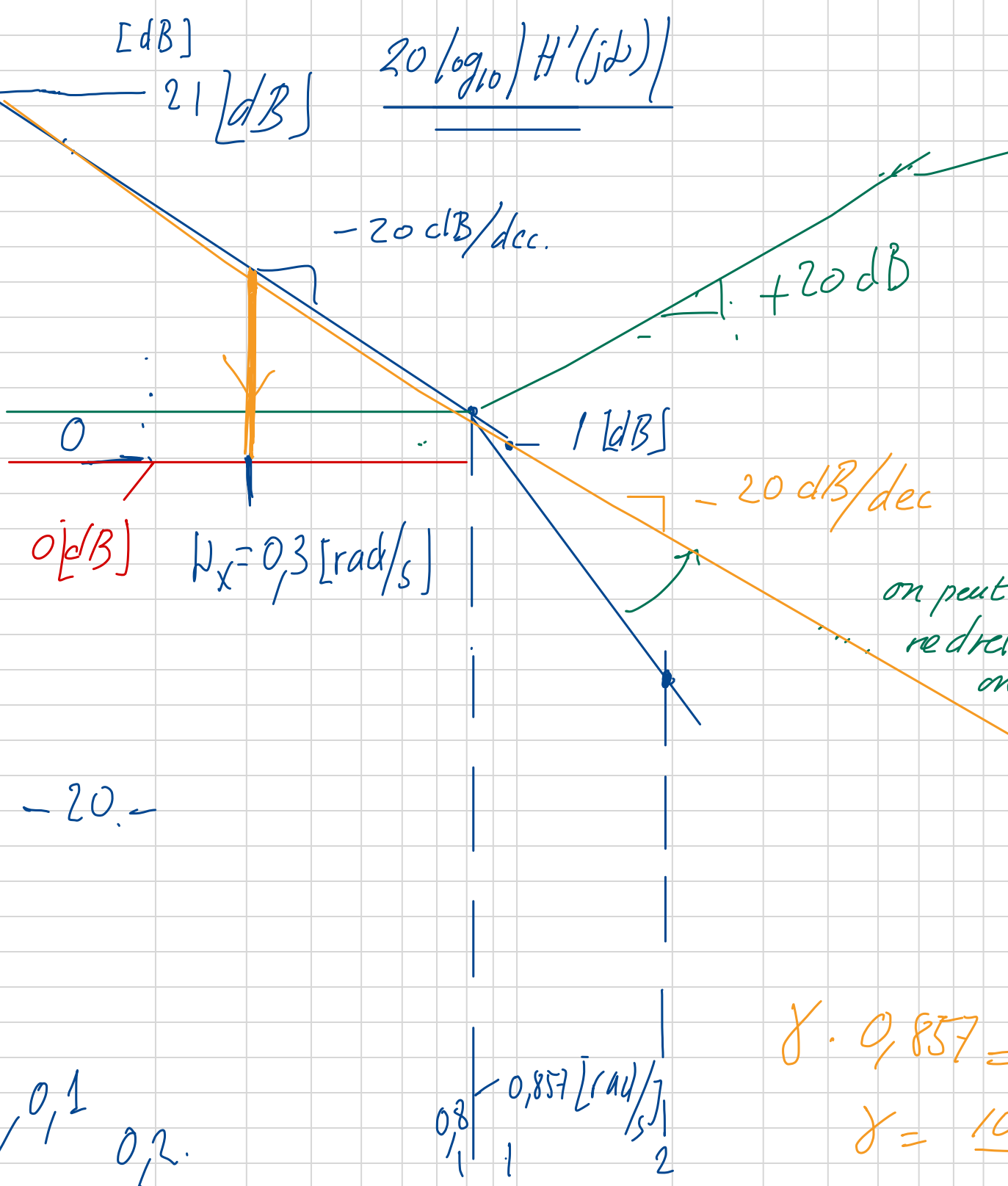
(graphiquement -28 dB)

$$\sim -28 \text{ dB}$$

-20 dB/dec

11.3 [rad/s]

$\omega \text{ [rad/s]}$



régulateur PD
 $K'(j\omega) =$
 $\gamma \cdot (j\omega + 0.857)$

on peut redresser cette partie.
 on verra par la suite que cela n'est pas nécessaire car marge de phase suffisante!

il faut descendre de 11 ou 12 dB pour croiser 0 dB à $\omega_x = 0.3 [rad/s]$

$$\gamma \cdot 0.857 = 10^{-11/20}$$

$$\gamma = \frac{10^{-11/20}}{0.857} \approx 0.3289$$

ainsi $21 - 20 \cdot 0,93 = 2,4 \text{ [dB]}$
(à $N = 0,857$)

ensuite dB à $N = 2$:

distance logarithmique entre 2 et 0,857

$$\log_{10} 2 - \log_{10} 0,857 = 0,301 + 0,067$$

$$0,368$$

donc à $N = 2$:

$$2,4 - 40 \cdot 0,368 = -12,32 \text{ [dB]}$$

(exercice: vérifier ceci sur le graphique!)

finalement à $N = 11,3 \text{ [rad/s]}$

distance logarithmique entre 11,3 et 2

$$\begin{aligned} \log_{10}(11,3) - \log_{10}(2) &= 1,053 - 0,3 \\ &= 0,752 \end{aligned}$$

ainsi

$$-12,32 - 20 \cdot 0,752 = -27,36 \text{ [dB]}.$$

Cette valeur asymptotique peut être calculée directement à partir de $H'(j\omega)$ en remarquant que c'est le gain lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, ce sont les plus grande puissance de ω dans la fractions rationnelle $H'(j\omega)$ qui dominant.

$$H'(j\omega) = \frac{-0,04285 \omega^2 - 0,4 \omega + 0,9714}{\omega (\omega + 0,857)}$$

$$\stackrel{\omega \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-0,04285 \cancel{\omega^2}}{\cancel{\omega^2}}$$

ainsi

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log_{10} |H'(j\omega)| = 20 \log_{10} 0,04285 = -27,36 \text{ [dB]}.$$

$K'(j\omega)$:

On peut négliger la partie en $\omega > 2$ [rad/s].

- 1° parceque le gain est petit
- 2° la déformation de l'échelle ω par rapport à ω devient une

déjà de 2 [rad/s] trop importante.

On évite ainsi d'utiliser cette plage de pulsation (fréquence).

Il faut redonner le module de 20 dB/dec à partir de $\omega = 0,857 \text{ [rad/s]}$.

On place ainsi un zéro $(\omega + 0,857)$ dans le régulateur. [En examinant la marge de phase résultante, on verra que cela n'est pas nécessaire]
Comme on désire une bande passante de $0,3 \text{ [rad/s]}$, il faut fixer la pulsation de croisement $\omega_x = 0,3 \text{ [rad/s]}$.

il faut donc choisir γ et

$$K'(j\omega) = \gamma \cdot (j\omega + 0,857)$$

de telle sorte que

$$|K'(j \cdot 0,3) H'(j \cdot 0,3)| = 1.$$

afin de passer par 0 dB lorsque $\omega = 0,3 \text{ [rad/s]}$

(graphiquement, on remarque qu'il faut atténuer de 11 ou 12 dB)

En négligeant la partie haute fréquence $H'(j\omega)$ est approximée par

$$H'(j\omega) = \frac{0,9714}{j\omega(j\omega + 0,857)}$$

de telle sorte que

$$K'(j\omega) H'(j\omega) = \cancel{\gamma(j\omega + 0,857)} \frac{0,9714}{j\omega(j\omega + 0,857)}$$

$$= \gamma \frac{0,9714}{j\omega}$$

$$1 = |K'(j\omega_x) H'(j\omega_x)| = \left| \frac{\gamma \cdot 0,9714}{j 0,3} \right|$$

($\omega_x = 0,3$)

$$\gamma = \frac{0,3}{0,9714} = 0,309$$

(graphiquement on a été moins précis
 $\gamma = 0,329$)

$$K'(w) = 0,309 (w + 0,857)$$

$K(z)$:

deux approches (ok les deux)

1°/ on remarque que $K'(w)$ est un régulateur analogique PD.

$$K'(w) = K_p (1 + wT_d) \Rightarrow K_p = 0,309 \cdot 0,857 = \underline{\underline{0,265}}$$

On prend ainsi l'équivalent discret du PD avec la deuxième méthode d'Euler.

$$K_p = 0,309 \cdot 0,857 = 0,2648 \quad K_p T_d = 0,309$$

$$T_d = \frac{0,309}{0,309 \cdot 0,857} = \frac{1}{0,857} = 1,17$$

$$K(z) = K_p \left(1 + \left(\frac{z-1}{h z} \right) T_d \right) \approx 0,265 \left(1 + 1,17 \frac{z-1}{z} \right)$$

2°/ En utilisant la transformée bilinéaire de Tustin:

$$K(z) = 0,309 \left(\frac{z}{h} \frac{z-1}{z+1} + 0,857 \right)$$

$$= \frac{0,309 \quad 2z - 2 + 0,857z + 0,857}{z+1}$$

$$= 0,309 \left(\frac{2,857z - 1,143}{z+1} \right) =$$

$$\frac{0,8828z - 0,353}{z+1}$$

Vérification de la marge de phase :

$$\arg \left| K'(j\omega) H'(j\omega) \right| \quad \omega = 0,3 \text{ [rad/s]}$$

$$\arg \left(\frac{-0,04285 (j \cdot 0,3)^2 - 0,4 \cdot j \cdot 0,3 + 0,9714}{j \cdot 0,3 (j \cdot 0,3 + 0,857)} \right)$$

$$0,309 \angle (j \cdot 0,3 + 0,857)$$

$$= \arg(0,97526 - 1,2j) - \arg(0,3 \cdot j)$$

$$= \arctan\left(\frac{-1,2}{0,9752}\right) - \arctan(0,3)$$

$$= -50,9^\circ - 16,7^\circ = -67,6^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 67,6^\circ = 112,4^\circ$$

c'est ok en ce qui concerne la
marge de phase.

la marge de phase importante nous incite
à éventuellement supprimer le terme dérivateur.
(cei est justifié également par le choix de $\lambda_x = 0,3$
inférieur au premier pôle $0,857$).

$K' = 0,265$ régulateur P uniquement.
(solution du tirre)
Vérifions la marge de phase correspondante

$$K' H'(w) = \frac{-0,04285 w^2 - 0,4 w + 0,9714}{w (w + 0,857)} \cdot 0,265$$

$$\arg(K'(j\lambda_x) H'(j\lambda_x)) =$$

$$\arg \left(\frac{-0,04285 (j \cdot 0,3)^2 - 0,4 \cdot j \cdot 0,3 + 0,9714}{j \cdot 0,3 (j \cdot 0,3 + 0,857)} \cdot 0,265 \right)$$

$$= \arg(0,97526 - 1,2j) - \arg(0,3 \cdot j) - \arg(0,3j + 0,857)$$

$$= \arctan\left(\frac{-1,2}{0,9752}\right) - \arctan(0,3) - \arctan\left(\frac{0,3}{0,857}\right)$$

$$= -50,9^\circ - 16,7^\circ - 19,29 = -86,89^\circ$$

$$\gamma = 180 - 86,89 = 93,10^\circ \Rightarrow \text{excellent encore donc } P: K_P = 0,265.$$