

Exercice 9.11.60

Estimer à partir de la figure a et b

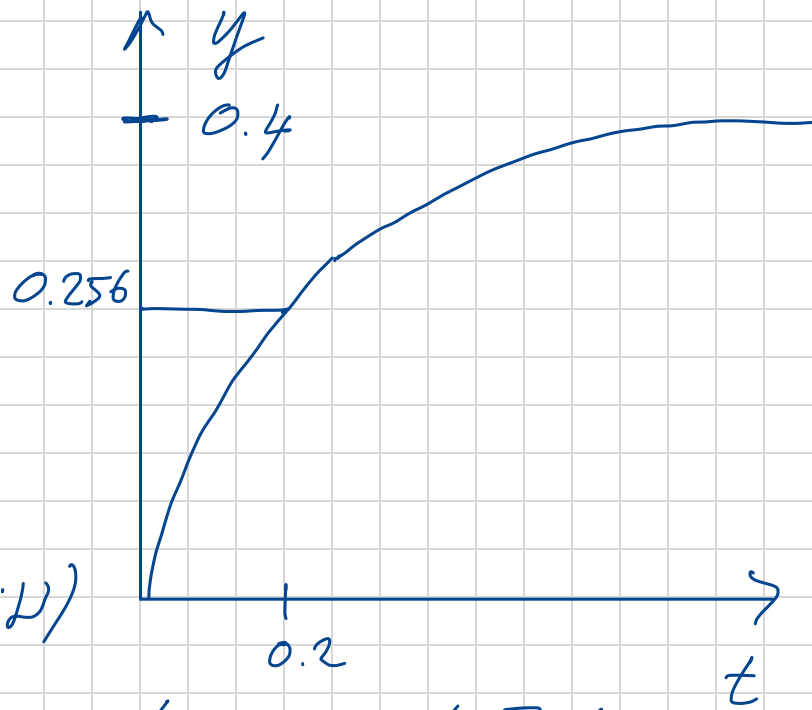
$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

$$h = 0.1 \text{ [s]}$$

Déterminer $H'(w)$, $H'(j\omega)$

et dessinez $|H'(j\omega)|$ dans un diagramme de Bode asymptotique. Déterminez un régulateur de telle sorte à:

- Pas avoir de statisme
- marge de phase $\gamma > 60^\circ$
- bande passante en B.F de 10 [rad/s] .



beta

On remarque que $G(0) = \frac{b}{0+a} = 0.4$

ainsi $b/a = 0.4$

Justification: $\mathcal{L}(\{ \varepsilon(t) \}) = \frac{1}{s}$ $u(t) = \{ \varepsilon(t) \}$, $y(t) = ?$

$$\begin{aligned} 0.4 = y(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= G(0) \end{aligned}$$

La constante de temps $\tau = \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned} \text{et } \tau &= \arg y(t) = 0.4 \cdot 0.63 \\ &\Rightarrow t = 0.2 \end{aligned}$$

justification : Décomposition en éléments simples

$$\frac{K}{s} + \frac{P}{s+a} \rightarrow \alpha \varepsilon(t) + \beta e^{-at}$$

$$0.4 \varepsilon(t) - 0.4 e^{-at}$$

$$\text{pour } t > 0 \quad y(t) = 0.4 - 0.4 e^{-at} = 0.4(1 - e^{-at})$$

$$\text{pour } t = \tau \quad (1 - e^{-a\tau}) = (1 - e^{-1}) = 0.63$$

$$\text{ainsi lorsque } y(t) = 0.63 y(+\infty), \\ t = \tau.$$

$$\Rightarrow a = 1/\tau$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 0.4 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.2} = 5$$

ainsi $b = 0.4 \cdot 5 = 2$

$$G(s) = \frac{2}{s+5}$$

$H(z)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s(s+5)}\right)$$

$$\frac{2}{s(s+5)} = \frac{\alpha}{s} + \beta \frac{1}{s+5}$$

$$\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2}{(s+5)s} = \frac{2}{5}$$

$$\beta = \lim_{s \rightarrow -5} \cancel{(s+5)} \frac{2}{\cancel{(s+5)}(-5)} = -\frac{2}{5}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{5} \frac{z}{5} - \frac{z}{5} \frac{1}{s+5} \right)$$

$$= \frac{z}{5} \{ \varepsilon(k) \} - \frac{z}{5} \{ e^{-5t} \}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{5} \{ \varepsilon(kh) \} - \frac{z}{5} \{ e^{-5h \cdot k} \}$$

$$\mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1}(\dots) \} = \frac{z}{5} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{5} \frac{z}{z - e^{-5h}}$$

$$h = 0,1 \text{ [s]}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{5} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{5} \frac{z}{z - 0,6065} \right)$$

$$= + \frac{z}{5} - \frac{z}{5} \frac{(z-1)z}{z(z-0,6065)}$$

$$= \frac{+ \frac{z}{5} (z - 0,6065) - \frac{z}{5} (z-1)}{z - 0,6065}$$

$$= \frac{0,3935 \left(\frac{z}{5} \right)}{z - 0,6065} = \frac{0,1574}{z - 0,6065}$$

Remarque: Le gain statique pourrait ne pas être préservé à cause des erreurs d'arrondi.

Vérifions ainsi si $H(1) = 0,4$:

$$\frac{0,1574}{1 - 0,6065} = \frac{0,1574}{0,3935} = 0,4$$



$H'(w)$:

On remplace z par $\frac{1 + w \frac{h}{z}}{1 - w \frac{h}{z}}$

$$z = \frac{z/h + w}{z/h - w} = \frac{20 + w}{20 - w}$$

$$\begin{aligned} H'(w) &= \frac{0,1574}{\frac{20+w}{20-w} - 0,6065} = \frac{0,1574 (20-w)}{(20+w) - 0,6065 \cdot (20-w)} \\ &= \frac{-0,1574 w + 3,148}{1,6065 w + 7,87} \end{aligned}$$

en rendant monique en divisant numérateur et dénominateur par

$$\frac{-0,09798 + 1,9595}{w + 4,8988}$$

Remarques: On trouve un zéro positif (système à non minimum de phase). Ceci est caractéristique des systèmes échantillonnés. Le pôle analogique en s est -5 . Le pôle "analogique" en w est -4.8988 . La différence est provoquée par la distorsion entre les échelles jw et $j\Omega$ introduite par la transformée bilinéaire. (NB: le corrigé du livre n'est pas précis à ce sujet).

$H'(j\Omega)$

$$H'(j\Omega) = \frac{-0,09798 j\Omega + 1,9595}{j\Omega + 4,8988}$$

Bode asymptotique

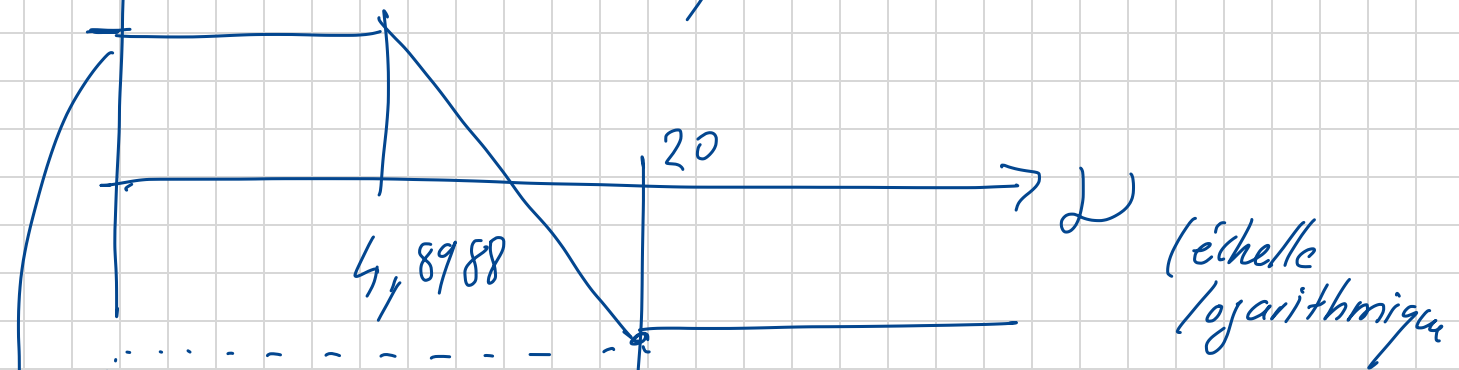
$$20 \log_{10} |H'(j\omega)|$$

Il faut classer la valeur absolue de la position des pôles et zéros. S'il y avait des pôles/zéros complexes, on déterminerait la pulsation de résonance (pôle) ou la pulsation du "notch" (zéro). On introduit ces valeurs dans le classement. Ici, nous avons uniquement un pôle et un zéro.

Chaque pôle ajoute -20 dB/dec en descendant et chaque zéro ajoute $+20 \text{ dB/dec}$.

	4,8988		20	
0 dB/dec		-20 dB/dec		0 dB/dec
	pôle		zéro	

$20 \log_{10} |H'(j\omega)|$ (échelle linéaire)



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log_{10} \left(\frac{1,9595}{4,8988} \right) = 20 \log_{10} (0,4) = -7,96 [\text{dB}]$$

nb de decades qui sépare 20 de 4,8988 :

$$\log_{10}(20) - \log_{10}(4,8988) = 1,301 - 0,69 = 0,61$$

$$-7,96 - 20 \cdot 0,61 = -20,18 \text{ [dB]}.$$

Faisons un petit dessin en échelle semi-logarithmique (pages suivantes).

Structure du régulateur: on ne veut pas de statisme
 ceci signifie un gain statique unité en B.T.

$$\left(\text{gain à fréquence nulle} = 1 \text{ pour } \frac{K'(j\omega)H'(j\omega)}{1 + K'(j\omega)H'(j\omega)} \right)$$

Si on utilise uniquement un terme proportionnel
 sa valeur devrait devenir très grande

$$\frac{K' H'(0)}{1 + K' H'(0)} = 1 \quad \text{seulement si } K \rightarrow \infty.$$

On introduit un intégrateur $\frac{1}{j\omega}$ en basse fréquence.

Comme on a un pôle en $-4,8988$, on peut
 introduire un zéro à $-4,8988$. Ainsi le régulateur

$K'(w) = \gamma \left(\frac{1}{j\omega} (j\omega + 4,8988) \right)$ (ceci conduit au
 gain fréquentiel complet en BO:

$$K'(j\omega) H'(j\omega) = \gamma \frac{1}{j\omega} \cancel{(j\omega + 4,8988)} \frac{(-0,0979 j\omega + 1,9595)}{\cancel{(j\omega + 4,8988)}}$$

Comme on veut une bande passante en B.T de 10
 [rad/s], on fixe la pulsation de croisement ω_x
 (pulsation à laquelle le gain en BO vaut 1,
 c.-à-d. 0 dB)

$$\omega_x = 10 \text{ [rad/s]}$$

$$K'(j\omega) H'(j\omega) = \gamma \cdot \frac{1}{j\omega} (-0,0979 j\omega + 1,9595)$$

$$1 = |K'(j \cdot 10) H'(j \cdot 10)| = \gamma \cdot \frac{1}{10} \cdot \sqrt{(0.979)^2 + (1.9595)^2}$$

$$\gamma = \frac{10}{\sqrt{(0.979)^2 + (1.9595)^2}} = \frac{10}{2.19} = 4.57$$

Vérifions ces calculs par des dessins

→ avec le dessin on trouve $\gamma = 5$. oh

Le régulateur est donc

$$K'(w) = 4.57 \frac{1}{w} (w + 4.8988)$$

on peut le mettre sous la forme d'un PI:

$$K'(w) = 4.57 \left(1 + 4.8988 \frac{1}{w} \right)$$

En arrondissant $K'(w) = 5 \left(1 + \frac{5}{w} \right)$ comme dans le livre.

$$K_p = 4.57, T_i = \frac{1}{4.8988}$$

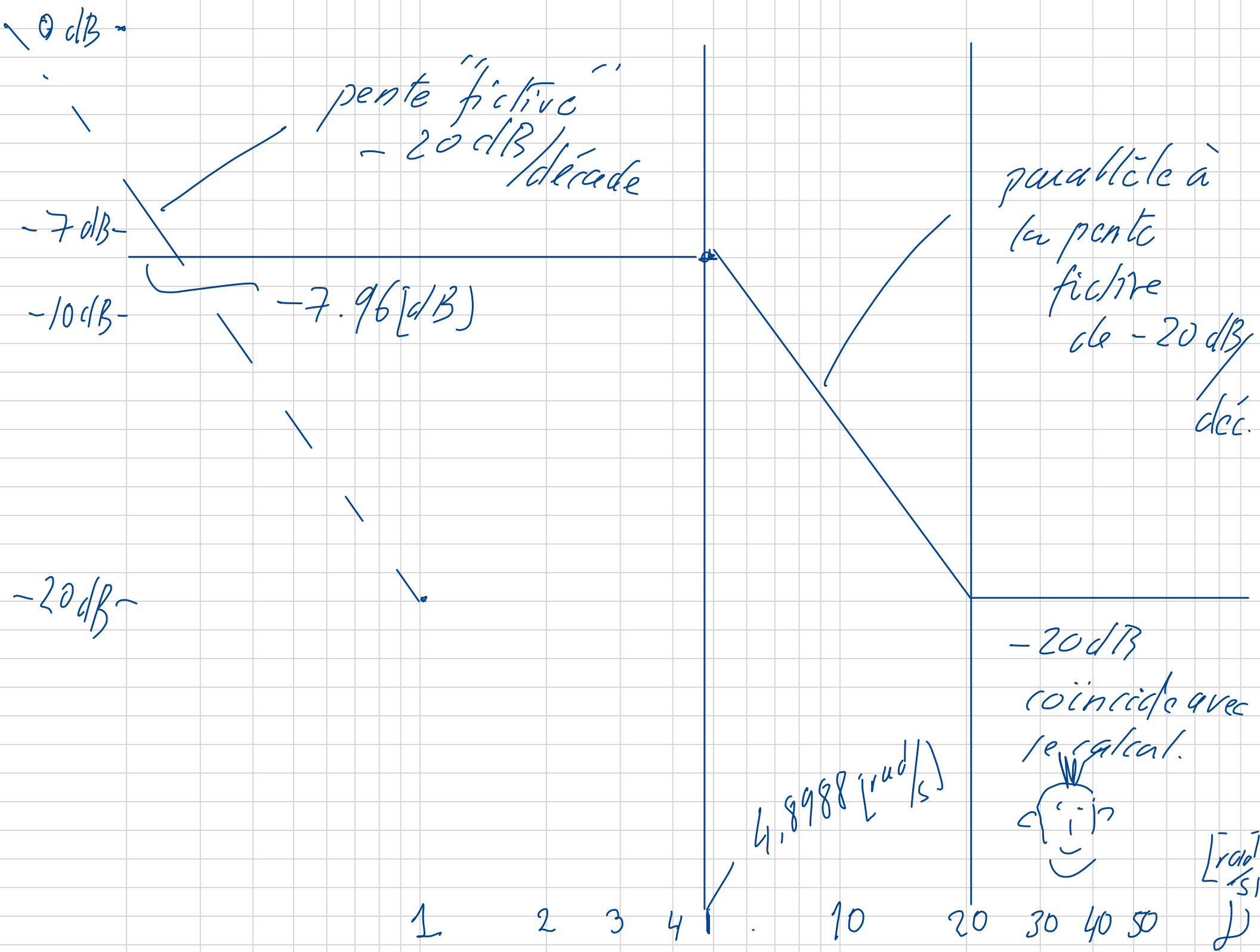
Régulateur direct: 2 solutions possibles:

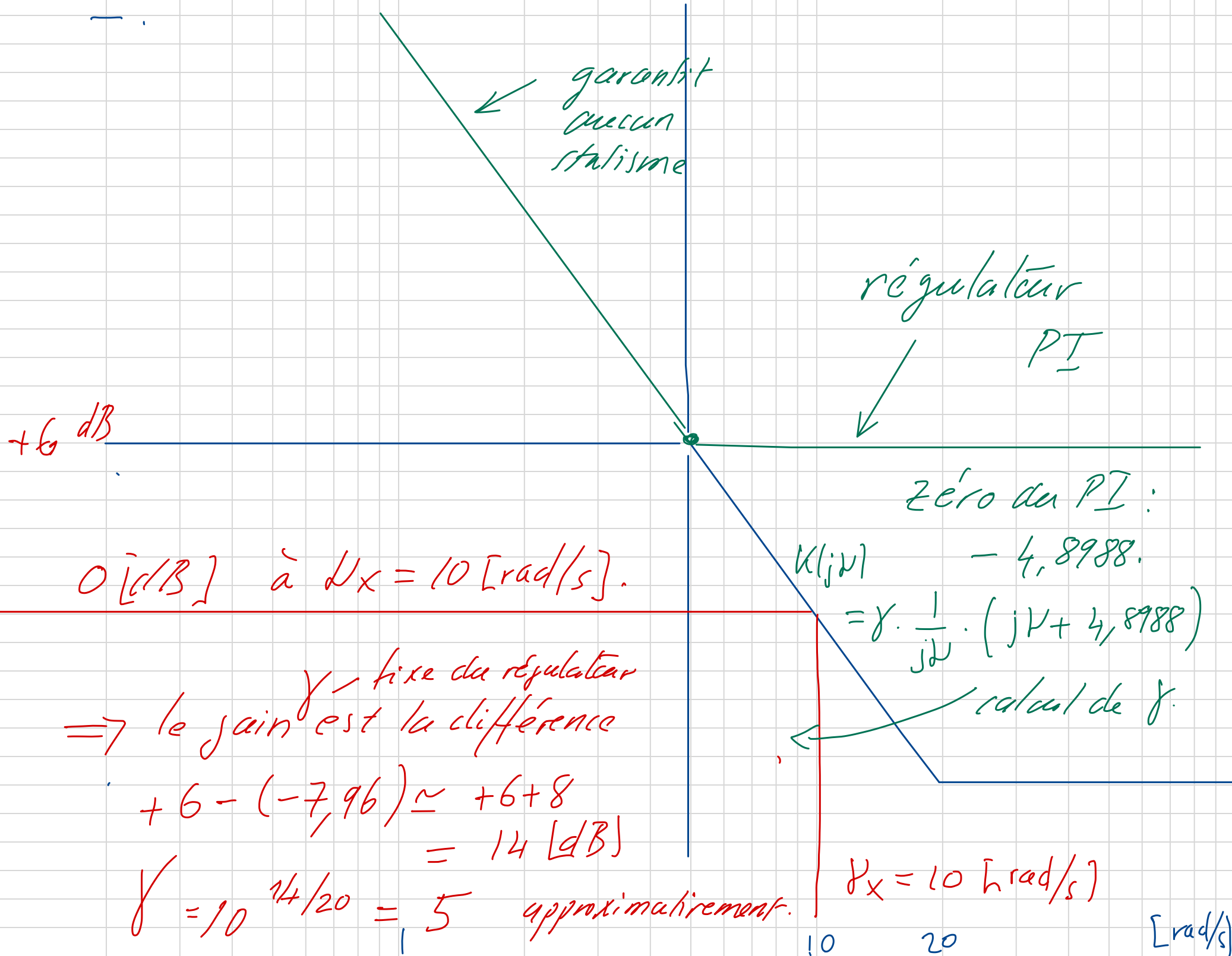
soit un PI avec 2ème méthode d'Euler

$$K(z) = 4.57 \left(1 + 4.8988 \frac{z}{z-1} \right)$$

soit avec Tustin: $K(z) = 4.57 \left(1 + \frac{4.8988}{20} \frac{z+1}{z-1} \right)$

$$w = \frac{z}{h} \\ 20 \frac{z-1}{z+1}$$





γ : marge de phase:

Il reste à vérifier la marge de phase.

On calcule l'argument du gain de BO à ω_x .

On doit calculer $\arg(K'(j\omega)H'(j\omega))$

$$= \arg 4,57 \left(\frac{1}{j\omega} (j\omega + 4,8988) \right) \cdot \frac{(-0,0979j\omega + 1,9595)}{(j\omega + 4,8988)}$$

$$= \arg(4,57) + \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \arg(-0,0979j\omega + 1,9595)$$

$$= 0^\circ - 90^\circ + \arctan\left(\frac{-0,979}{1,9595}\right)$$

$$\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = \arg\left(\frac{1}{j}\right) = \arg(-j) = -90^\circ$$

$$= -90^\circ - 26^\circ = -116^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$

