

VIII Numérisation

①

1. Introduction
2. Echantillonnage du régulateur
3. PID analogique et éch. et maintien
4. 1ère méthode d'Euler
5. 2ème méthode d'Euler
6. Tustin
7. Antiemballement (anti-reset windup)

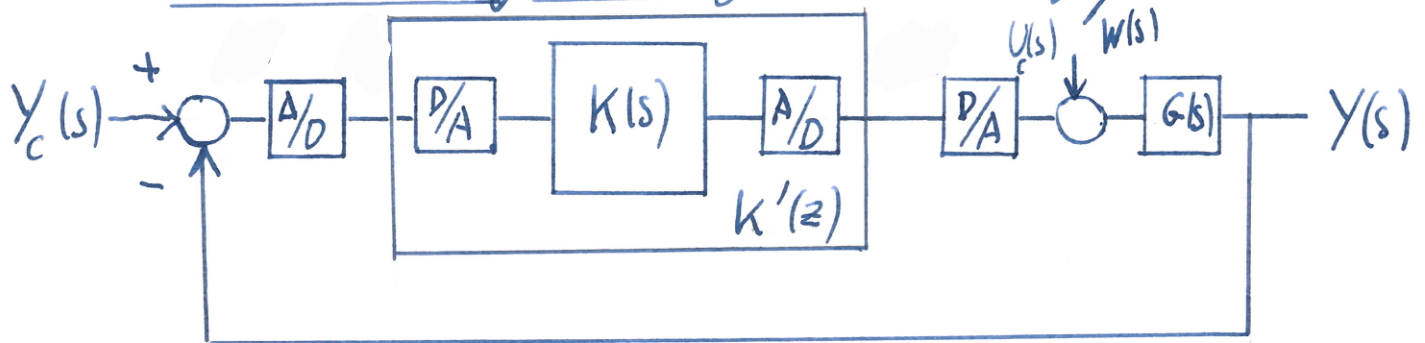
1 Introduction

On suppose un système analogique donné.

Comment obtenir le système analogique équivalent ?

- Par la formule d'échantillonnage et maintien (ZOH)
- Par des méthodes approximatives
1 & 2 (pas tjs stable)
- Par la transformation de Tustin. Méthode de Tustin
(tjs. stable !)

2. Echantillonnage du régulateur analogique



Si $W(s) = 0$ $U(s) = U_c(s)$

$$K'(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K(s)}{s} \right) \right]$$

3. Le régulateur PID analogique

(2)

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right)$$

P
I
D

pour rendre causal

Echantillonnage et maintien

$$K(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K_p}{s} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) \right) \right)$$

$$K'(z) = K_p \left(1 + \frac{h/T_i}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - e^{-N \frac{h}{T_d}}} \right)$$

4. 1ère méthode d'Euler

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}}{s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}} \quad n \geq m$$

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-2} \ddot{u}(t) + a_{n-1} \dot{u}(t) + a_n u(t) = b_0 e^{(m)}(t) + \dots + b_{m-2} \ddot{e}(t) + b_{m-1} \dot{e}(t) + b_m e(t)$$

$$t = kh$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h}$$

$$\Rightarrow \dot{u}(kh) \approx \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h}$$

$$\ddot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{u}(kh+h) - \dot{u}(kh)}{h} \approx \frac{\frac{u(kh+2h) - u(kh+h)}{h} - \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h}}{h}$$

$$\ddot{u}(kh) = \frac{u(kh+2h) - 2u(kh+h) + u(kh)}{h^2}$$

(3)

autrement dit

$$s^2 U(s) \cong \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 U(z)$$

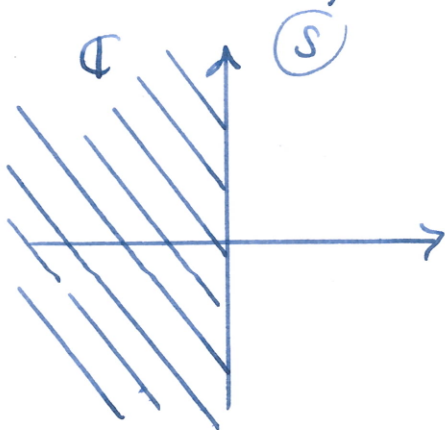
$$s \rightarrow \frac{z-1}{h}$$

1ère méthode d'Euler

$$K'(z) = \frac{U'(z)}{E'(z)}$$

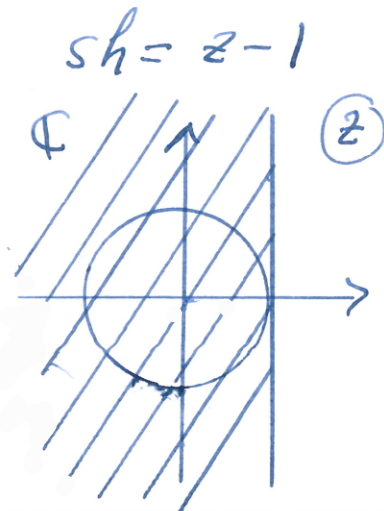
$$\begin{aligned} \left(\frac{z-1}{h}\right)^n U'(z) + \dots + a_{n-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 U'(z) + a_{n-1} \left(\frac{z-1}{h}\right) U'(z) + a_n U'(z) \\ = b_0 \left(\frac{z-1}{h}\right)^m E'(z) + \dots + b_{m-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 E'(z) + b_{m-1} \frac{z-1}{h} E'(z) \\ + b_m E'(z) \end{aligned}$$

Avec cette approximation :



$$z = sh + 1$$

$$\xrightarrow{sh+1}$$



⚠ Un système stable en s peut devenir instable une fois approximé par la 1ère méthode d'Euler.

$K(s)$ BIBO stable

$\nrightarrow$
(parfois)

$K'(z)$ BIBO stable

3. Deuxième méthode d'Euler

(4)

$$\dot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(kh) - u(kh-h)}{h}$$

$$\dot{u}(kh) \text{ est approximé par } \frac{u(kh) - u(kh-h)}{h}$$

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{h} = \frac{z-1}{hz}$$

$$hs = 1 - z^{-1}$$

$$z^{-1} = 1 - hs$$

$$z = \frac{1}{1 - hs}$$

$$\text{en posant } s = \sigma + j\omega$$

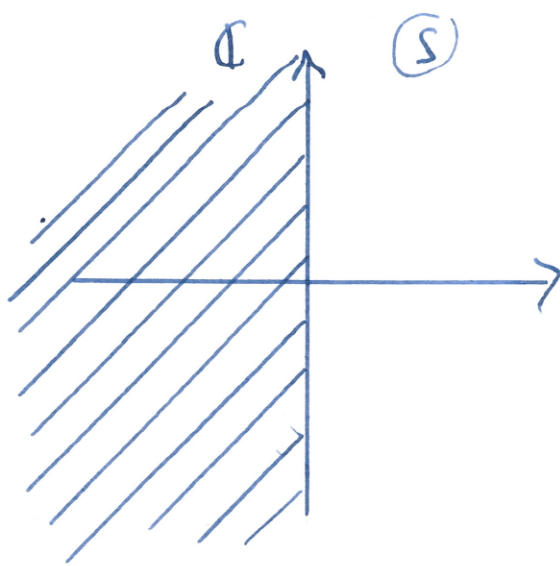
$$|z - 0.5| = \left| \frac{1}{1 - h(\sigma + j\omega)} - 0.5 \right| = \left| \frac{1 - 0.5(1 - h\sigma - h\omega j)}{1 - h\sigma - h\omega j} \right|$$

$$= 0.5 \left| \frac{1 + h\sigma + h\omega j}{1 - h\sigma - h\omega j} \right| = 0.5 \frac{\sqrt{(1 + h\sigma)^2 + h^2 \omega^2}}{\sqrt{(1 - h\sigma)^2 + h^2 \omega^2}}$$

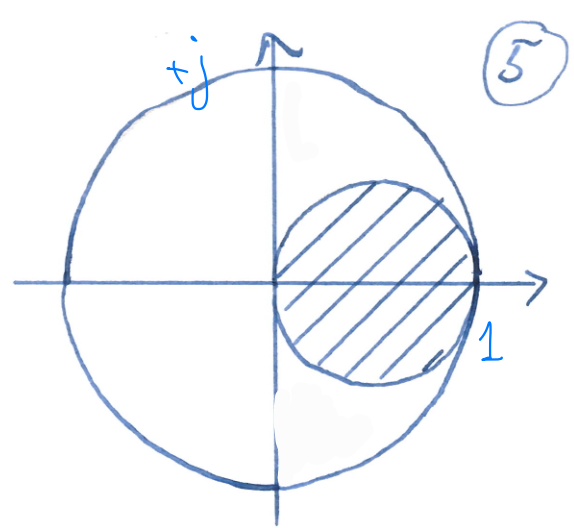
$$\Rightarrow |z - 0.5| < 0.5 \Leftrightarrow \sigma < 0$$

$$(a-b)^2 + c^2 > (a+b)^2 + c^2$$

$$(a-b)^2 > (a+b)^2 \Leftrightarrow b < 0$$



$$s = \frac{z-1}{hz}$$



Application au PID

Euler 1ère méthode

$$s = \frac{z-1}{h}$$

$$K(s) = K_n \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_d s + 1} \right)$$

$$K'(z) = K \left(1 + \frac{h/T_i}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - (1 - N\frac{h}{T_d})} \right) \rightarrow \text{le pôle peut sortir du cercle unité}$$

Euler 2ème méthode

$$s = \frac{z-1}{hz}$$

$$K'(z) = K \left(1 + \frac{h/T_i z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{(1 + N\frac{h}{T_d})z - 1} \right)$$

toujours stable car $1 + N\frac{h}{T_d} > 1$ et donc $|z_i| < 1$ ← pôle

6. Méthode de Tustin (transformation bilinéaire, de Möbius)

Puissances négatives de s (afin de faire apparaître l'intégrale $\frac{1}{s}$)

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_0 s^{-(n-m)} + b_1 s^{-(n-m+1)} + \dots + b_m s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \dots + a_n s^{-n}}$$

$$U(s) = 1 + a_1 \frac{1}{s} U(s) + \dots + a_n \frac{1}{s^n} U(s) = b_0 \frac{1}{s^{n-m}} E(s) + b_1 \frac{1}{s^{n-m+1}} E(s) + \dots + b_m \frac{1}{s^n} E(s)$$

Dans le domaine temporel cela donne

(6)

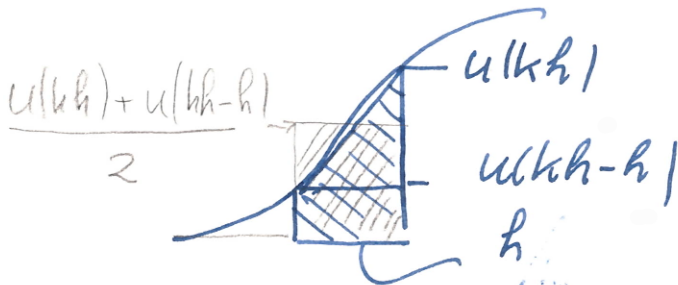
$$u(t) + a_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + a_2 \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma) d\sigma + \dots$$

$$\text{Posons } i_1(kh) = \int_0^{kh} u(\tau) d\tau$$

$$i_2(kh) = \int_0^{kh} \int_0^\tau u(\sigma) d\sigma.$$

les intégrales sont approximées par la règle

$$i_1(kh) = i_1(kh-h) + \frac{h}{2} (u(kh-h) + u(kh))$$



$$i_2(kh) = i_2(kh-2) + \frac{h}{2} (i_1(kh-h) + i_1(kh))$$

En prenant la transformée en z :

$$I_1(z) = z^{-1} I_1(z) + \frac{h}{2} [U'(z)z^{-1} + U'(z)]$$

$$I_2(z) = z^{-1} I_2(z) + \frac{h}{2} [I_1(z)z^{-1} + I_1(z)]$$

$$I_1(z) = \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1} U'(z)$$

$$I_2(z) = \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1} I_1(z) = \left(\frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1} \right)^2 U'(z)$$

$$\text{etc.} \quad \frac{1}{s} \rightarrow \frac{h}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

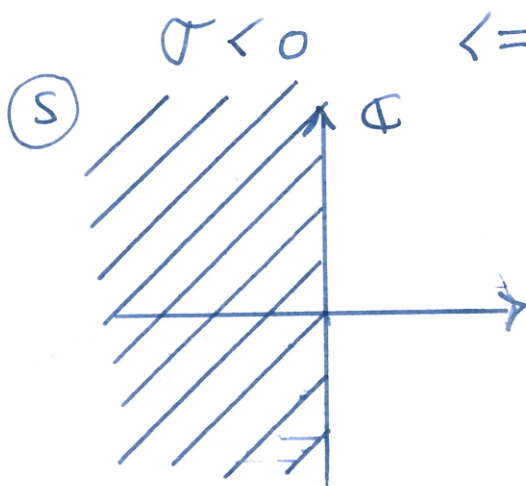
$$S \rightarrow \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Méthode de Tustin}$$

(7)

$$z = \frac{1 + s \frac{h}{2}}{1 - s \frac{h}{2}}$$

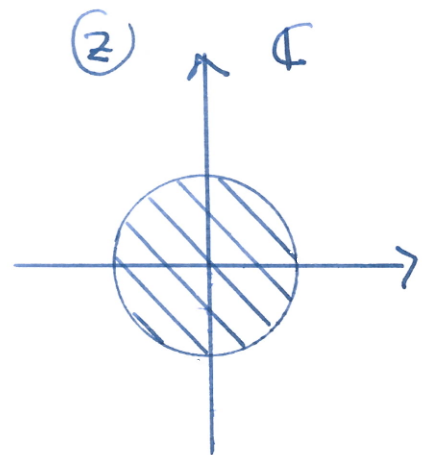
$$s = \sigma + j\omega$$

$$|z| = \left| \frac{1 + (\sigma + j\omega) \frac{h}{2}}{1 - (\sigma + j\omega) \frac{h}{2}} \right| = \sqrt{\frac{(1 + \sigma \frac{h}{2})^2 + (\omega \frac{h}{2})^2}{(1 - \sigma \frac{h}{2})^2 + (\omega \frac{h}{2})^2}}$$



$$\Leftrightarrow |z| < 1$$

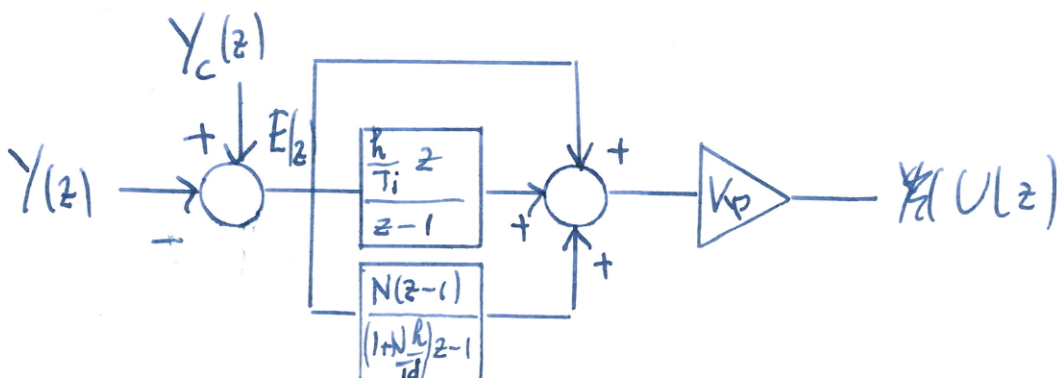
$$s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$



PID par la méthode de Tustin

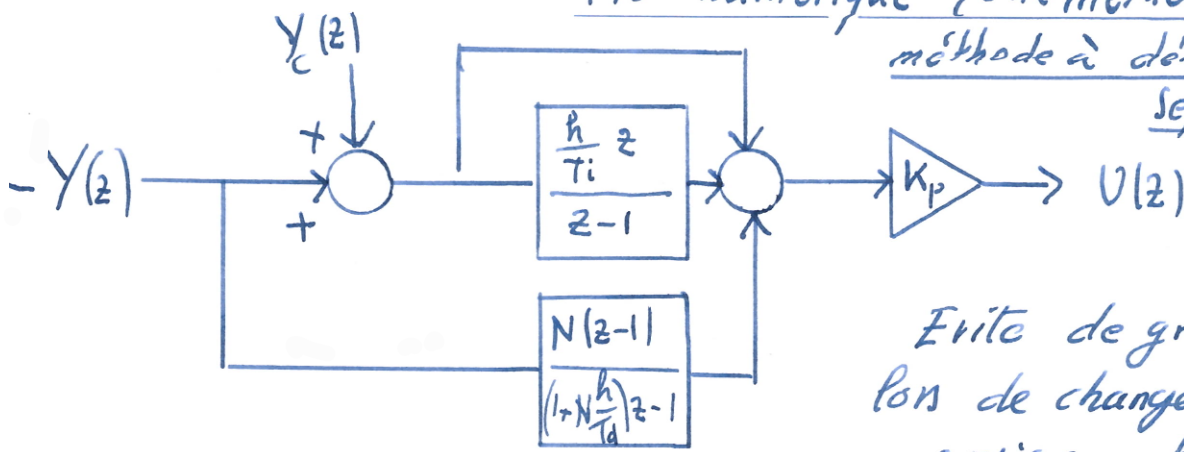
$$K'(z) = K_p \left[1 + \frac{\frac{h}{2T_i} (z+1)}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{2T_d}\right) z - \left(1 - N \frac{h}{2T_d}\right)} \right]$$

Schéma PID numérique 2ème méthode d'Euler



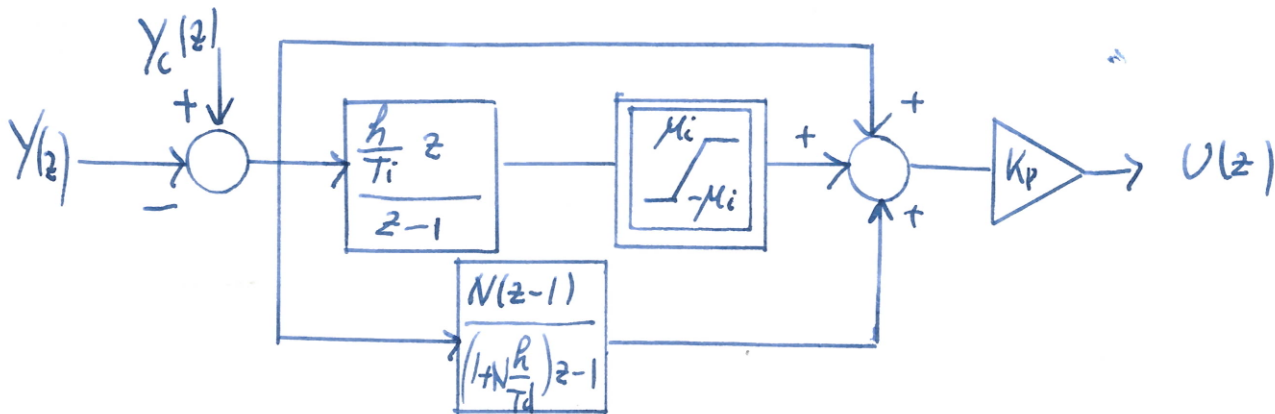
PID numérique 2ème méthode d'Euler
méthode à dérivation
séparée

(8)



Évite de grandes commandes
lors de changements de
consigne brusques

7. Mesure anti-emballement (anti-reset windup)



autre technique: [Geler l'intégration dès que la commande est en saturation

lorsque $|u| = U_{max}$, $v_i(kh) = v_i(kh-h)$

$$u(kh) = K_p (e(kh) + v_i(kh) + u_d(kh))$$