

VII Stabilité

①

1. Définition
2. Critère de Jury
3. Critère de Nyquist
"simplifié"
4. Robustesse
marge de gain
marge de phase
5. Ecarti permanents

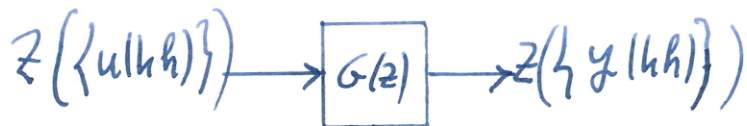
0. Introduction / Motivation

La stabilité est essentielle pour le bon fonctionnement d'un système

- Un système initialement instable peut être stabilisé par rétro-action.
- Un système en rétroaction peut devenir instable.
- Un système échantillonné en rétroaction, peut être limité par le choix de h . STABILITE?

1. Définition Stabilité BIBO

Entrée bornée / sortie bornée



$$\forall c, \|\{u(kh)\}\| < c \Rightarrow \exists c' < \infty \|\{y(kh)\}\| < c'$$

Normes

norme ℓ_∞

$$\max_k |u(kh)| \triangleq \|\{u(kh)\}\|_\infty$$

norme ℓ_2

$$\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (u(kh))^2} \triangleq \|\{u(kh)\}\|_2$$

norme ℓ_1

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u(kh)| \triangleq \|\{u(kh)\}\|_1$$

Théorème Un système discret au repos linéaire causal et stationnaire est BIBO stable

$\Leftrightarrow$

$$\exists C \text{ fini, } \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| \leq C$$

Démonstration

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| \leq C \Rightarrow \text{stabilité}$$

Soit $\{u(k)\}$ borné (l_{∞})

c-a-d. $\exists C' \quad |u(k)| < C' \quad \forall k$

$$|y(k)| = \left| \sum_{l=0}^k u(l) g(k-l) \right| = \left| \sum_{l=0}^k g(l) u(k-l) \right|$$

$$\|y(k)\|_{l_{\infty}} < C'$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} |g(l)| |u(k-l)| \leq C' \sum_{l=0}^{\infty} |g(l)| \leq C' C$$

Triangle
 $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq |a_1 b_1| + |a_2 b_2| \leq |a_1| |b_1| + |a_2| |b_2|$
 $|\sum a_i b_i| \leq \sum |a_i| |b_i|$

Ainsi $\forall \{u(k)\} \quad \|u\|_{l_{\infty}} < C' \Rightarrow \|y\|_{l_{\infty}} < C' C$

Démonstration $\text{stabilité} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| \leq C$

contraposée

$$A \Rightarrow B$$

$$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

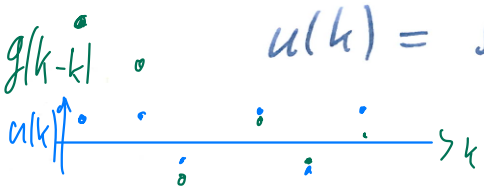
on part ainsi de la divergence de $\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|$

ainsi $\forall C^* > 0, \exists K \quad \sum_{k=0}^K |g(k)| > C^*$

Soit l'entrée bornée

$$u(k) = \text{sgn}(g(K-k)) =$$

$$\begin{cases} 1 & g(K-k) > 0 \\ 0 & g(K-k) = 0 \\ -1 & g(K-k) < 0 \end{cases}$$



Avec $l = K - k$ $0 < l \leq K$

(3)

$$u(K-l) = \text{sgn}(g(l))$$

$$\begin{aligned} y(K) &= \sum_{l=0}^K g(l) u(K-l) = \sum_{l=0}^K g(l) \text{sgn}(g(l)) \\ &= \sum_{l=0}^K |g(l)| > c^* \end{aligned}$$

quel que soit c^* , il existe un entier K tel que $y(K) > c^*$

La réponse $\{y(k)\}$ est ainsi non bornée $\rightarrow \infty$.

Pour un système linéaire, les normes sont équivalentes

Théorème stabilité BIBO de $G(z)$
Corollaire

$\Leftrightarrow$

tous les pôles $p_i \in \mathbb{C}$ sont tels que $|p_i| < 1$

Esquisse de démonstration

Décomposition en éléments simples

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_\ell}{z^\ell} + \dots \quad \text{pôles nuls de multiplicité 1 à } \ell.$$

$$G(z) = \dots + \frac{c_1}{z-p} + \frac{c_2}{(z-p)^2} + \dots + \frac{c_\ell z}{(z-p)^\ell}$$

$k \cdot 10.999^k$

$$\begin{aligned} g(k) &= c_0' \Delta(k) + c_1' \Delta(k-1) + \dots + c_\ell' \Delta(k-\ell) + \dots \\ &\dots + c_1 p^k + c_2 k p^{k-1} + \dots + c_\ell \frac{1}{(l-1)!} \prod_{i=0}^{l-2} (k-i) p^{k-l+1} \end{aligned}$$

grâce au critère de d'Alembert

$$|g(k)| < C \Leftrightarrow |p| < 1$$

$\Leftrightarrow \frac{|g_{k+1}|}{|g_k|} < 1 \quad \forall k > K \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$ converge

(le terme est dominé par le terme exponentiel)

2. Critère de Jury

Fastidieux de calculer tous les pôles

Peut-on déterminer la stabilité à l'aide d'un critère algébrique?

Réponse oui : critère de Jury

Soit $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ (*)

$$- \alpha_n \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad \alpha_n \triangleq \frac{a_n}{a_0}$$

$$- \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} a_0^{(n-1)} & a_1^{(n-1)} & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n-1}^{(n-1)} & a_{n-2}^{(n-1)} & \dots & a_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \alpha_{n-1} \triangleq \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}}$$

$$- \alpha_{n-2} \begin{pmatrix} a_0^{(n-2)} & a_1^{(n-2)} & \dots & a_{n-2}^{(n-2)} \\ a_{n-2}^{(n-2)} & a_{n-3}^{(n-2)} & \dots & a_0^{(n-2)} \end{pmatrix} \quad \alpha_{n-2} \triangleq \frac{a_{n-2}^{(n-2)}}{a_0^{(n-2)}}$$

$$a_0^{(n-3)}$$

⋮

$$a_0^{(0)}$$

Quand $a_0 > 0$, les zéros de (*) sont tels que

$$|z_i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$a_0^{(i)} > 0$$

De surcroît, si $a_0^{(i)} \neq 0$, le nombre de coefficients négatifs est égal au nombre de zéros $|z_i| > 1$.

Exemple

$$A(z) = z^3 - 0.7z^2 - 0.5z + 0.3$$

(5)

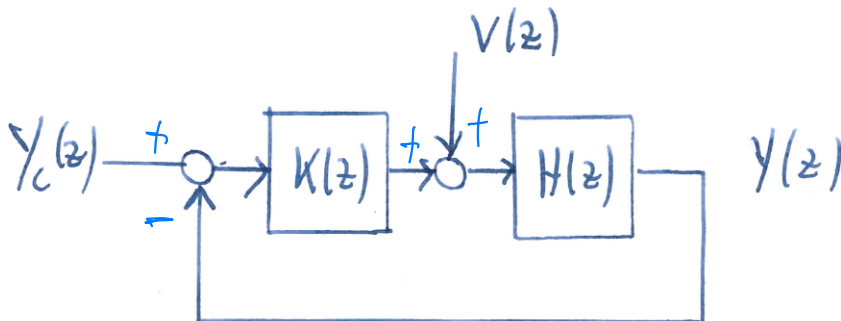
	(1)	0.7	0.5	-0.3	
- (-0.3)	(-0.3)	0.5	0.7	1	$\alpha_3 = -0.3$
	(0.91)	0.85	0.71		
- 0.78	(0.71)	0.85	0.91		$\alpha_2 = \frac{0.71}{0.91} = 0.78$
	(0.36)	0.19			
- 0.53	(0.19)	0.36			$\alpha_1 = \frac{0.19}{0.36} = 0.53$
	(0.26)				

3. Critère de Nyquist

Critère simplifié: tous les pôles en boucle ouverte sont stables

Motivation: trouver un critère qui permette de quantifier la stabilité de la boucle fermée

$\Rightarrow$ en examinant la boucle ouverte (Bo), on déduit la stabilité de la boucle fermée (BF)



objectif

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} \approx 1$$

$$\frac{Y(z)}{V(z)} \approx 0$$

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

La stabilité est déterminée par les zéros de $1 + K(z)H(z)$ en B.F.

$1 + K(z)H(z)$ est une fonction rationnelle en z .

Le polynôme du dénominateur de $\frac{1}{1 + KH}$ détermine la stabilité

introduisons les polynômes: $K(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$ $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$
 A, R, B, S

$$1 + K(z)H(z) = 1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{AR + BS}{AR} \quad (6)$$

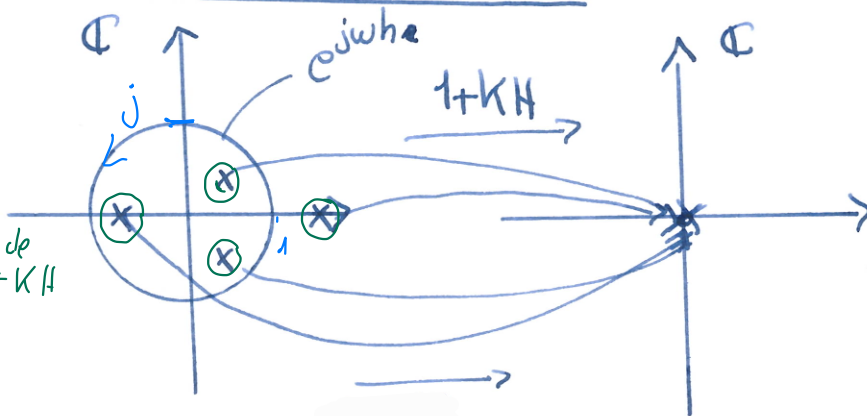
la boucle ouverte est déterminée par $K \cdot H = \frac{SB}{A \cdot R}$

$A \cdot R$ détermine la stabilité en B.O.

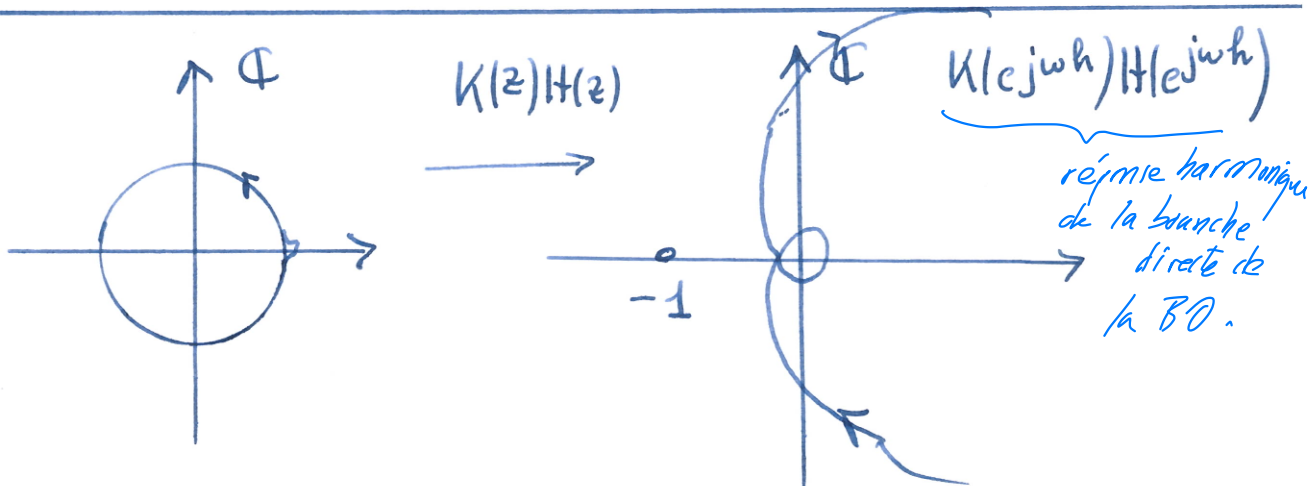
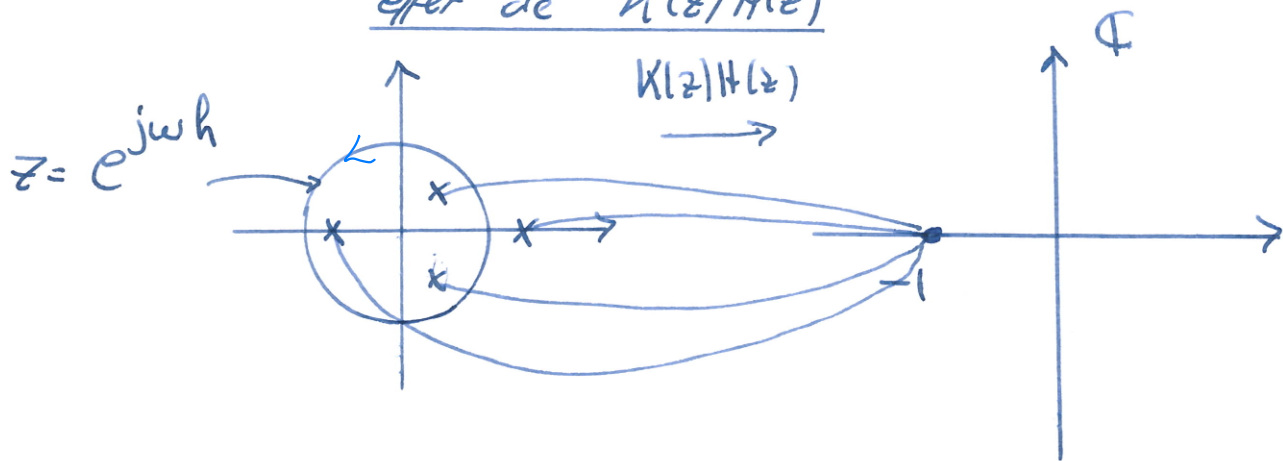
Illustration de l'effet de $1 + K(z)H(z)$ sur les zéros de $AR + BS$

x: pôle de la BF.

o: zéros de $AR + BS$ = zéros de $1 + KH$
 $o \equiv x$



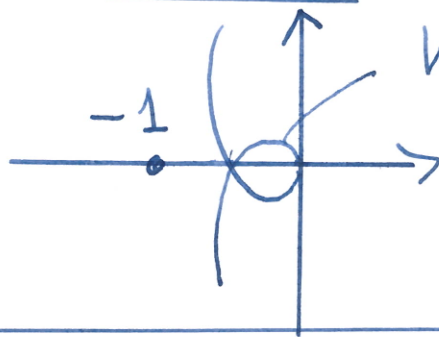
effet de $K(z)H(z)$



Critère de Nyquist "simplifié"

Supposons les pôles de $A \cdot R$ dans le cercle unité. (7)

stabilité BIBO



stab. bibo $\Leftrightarrow$

le point -1 n'est pas encerclé par $K(e^{j\omega h})G(e^{j\omega h})$

autrement dit, le point -1 est laissé à gauche.

critère généralisé:

AR possède p pôles instables p pôles tels que $|p_i| > 1$

$K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ encercle p fois -1 .

$\Leftrightarrow$

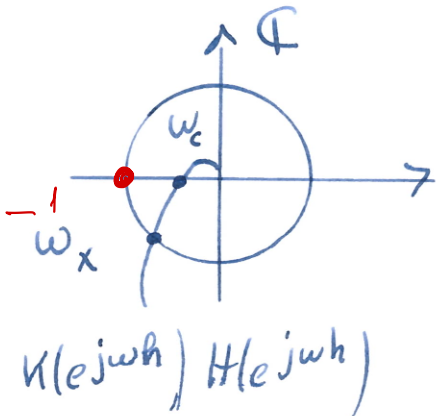
stabilité BIBO de la B.F.

Démonstration cf livre basé sur le thm de Cauchy et le principe de l'argument

zéros de $1+KH \equiv$ pôles de $\frac{1}{1+KH} \rightarrow$ zéros de $AR+BS$

pôles de $1+KH \equiv$ zéros de $\frac{1}{1+KH} = \frac{1}{1 + \frac{BS}{AR}} = \frac{AR}{AR+BS} \rightarrow$ zéros de AR
= pôle B.O.

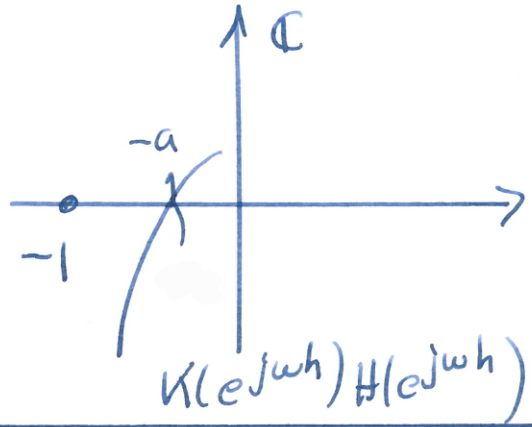
4. Robustesse



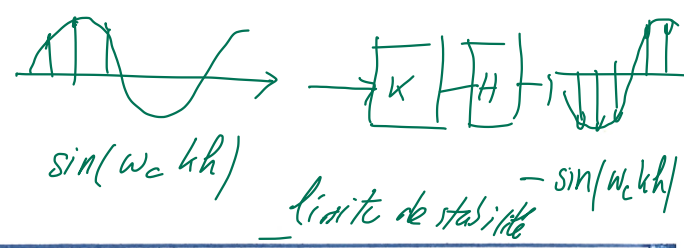
Déf coupure de l'axe réel:
pulsation critique

Déf coupure du cercle unité
pulsation de croisement

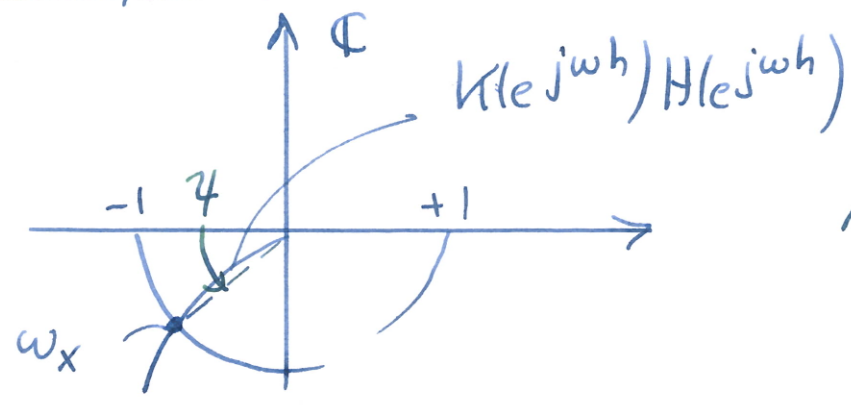
Marge de gain



Marge de gain $\frac{1}{a}$

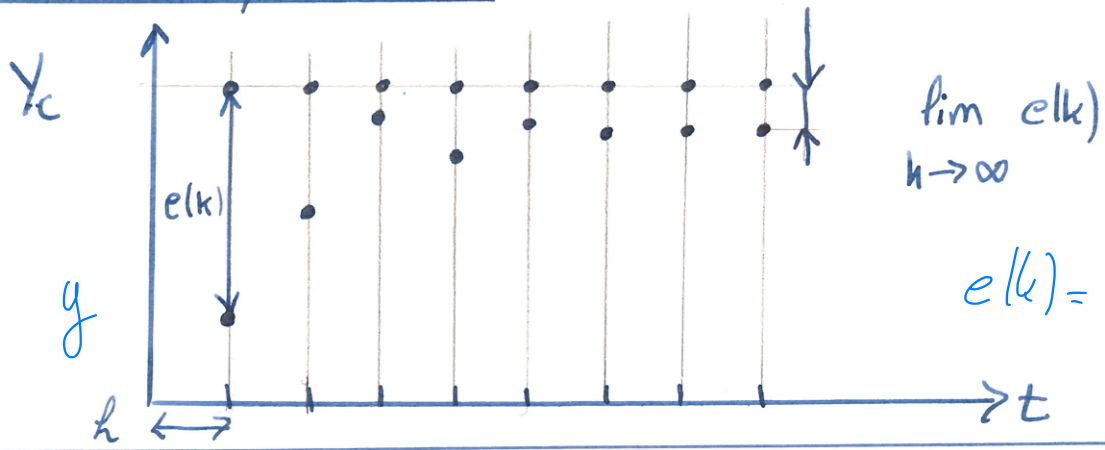


Marge de phase



Marge de phase
angle γ

5. Ecartis permanents



$$e(k) = y_c(k) - y(k)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + K(z)H(z)} Y_c(z) = S(z) Y_c(z)$$

$$K(z)H(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^\ell A(z)}$$

$$Y = \frac{KH}{1+KH} Y_c$$

$$E = Y_c - Y = \frac{1+KH}{1+KH} Y_c - \frac{KH}{1+KH} Y_c$$

Définition

ℓ : type ou classe du système en B.O.

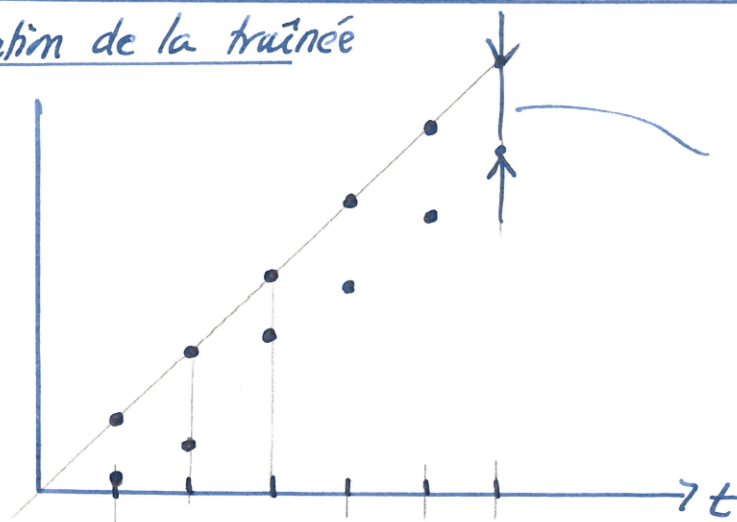
gain permanent en B.O

(9)

$$\gamma \triangleq \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^l K(z)H(z) = \frac{B(1)}{A(1)}$$

consigne type	$Y_c(k)=1$	$Y_c(k)=kh$	$Y_c(k)=\frac{1}{2}(kh)^2$
0	statisme $\frac{1}{1+\gamma}$	∞	∞
1	0	traînée $\frac{h}{\gamma}$	∞
2	0	0	$\frac{h^2}{\gamma}$

Illustration de la traînée



$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{h}{\gamma}$$

se calcule directement à partir des transformées en z