

VII Stabilité

①

1. Définition

2. Critère de J

3. Critère de N

5. Ecart

4. Robustesse

marge de
marge de

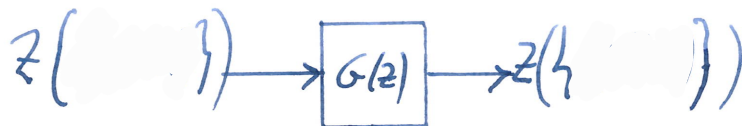
0. Introduction / Motivation

La stabilité est essentielle pour le bon fonctionnement d'un système

- Un système initialement peut être par
- Un système en rétroaction peut
- Un système échantillonné, peut être limité par le choix STABILITE?

1. Définition Stabilité BIBO

Entrée / sortie



$$\forall, \| \cdot \| < \infty \Rightarrow \exists < \infty \| \cdot \| < c'$$

Normes

norme ℓ_∞

$$\triangleq \| \{u(kh)\} \|_\infty$$

norme ℓ_2

$$\triangleq \| \{u(kh)\} \|_2$$

norme ℓ_1

$$\triangleq \| \{u(kh)\} \|_1$$

Théorème Un système discret au repos linéaire causal et stationnaire est BIBO stable

$\Leftrightarrow$

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Démonstration

Soit $\{u(k)\}$ borné (ℓ_{∞}) / c-a-d. $\exists c' \forall k, |u(k)| < c'$

$$|y(k)| = \left| \sum_{l=0}^k h(l) u(k-l) \right| \leq \sum_{l=0}^k |h(l)| |u(k-l)| \leq c' \sum_{l=0}^k |h(l)| \leq c' \sum_{l=0}^{\infty} |h(l)| \leq c' c$$

Ainsi $\forall \{u(k)\} \quad \|u\|_{\ell_{\infty}} < c' \Rightarrow \|y\|_{\ell_{\infty}} < c' c$

Démonstration stabilité $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$

contournée $A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$

on part ainsi de la divergence de $\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|$

ainsi $\forall c^* > 0, \exists K \sum_{k=0}^K |g(k)| > c^*$

Soit l'entrée bornée

$$u(k) = \text{sgn}(g(K-k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(K-k) > 0 \\ 0 & \text{si } g(K-k) = 0 \\ -1 & \text{si } g(K-k) < 0 \end{cases}$$

> 0

$= 0$

< 0

Avec $l = K - k$ $0 < l \leq K$

$$u(K-l) = \text{sgn}(g(l))$$

$$y(K) = \sum_{l=0}^K g(l) u(K-l) = \sum_{l=0}^K$$
$$=$$

quel que soit c^* , il existe un entier K tel que $y(K) > c^*$

La réponse est ainsi non bornée $\rightarrow \infty$.

Pour un système linéaire, les normes sont équivalentes

Théorème stabilité BIBO de $G(z)$

$\Leftrightarrow$

tous les pôles $p_i \in \mathbb{C}$ sont tels que

Esquisse de démonstration

Décomposition en éléments simples

$C_0 + \dots + \dots$ pôles nuls de multiplicité 1 à l .

$$G(z) = \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$g(k) = C_0' + C_1' + \dots + C_l' + \dots$$
$$\dots + C_1 + C_2 + \dots + C_l \prod_{i=0}^{l-2} (k-i)p^{k-l+1}$$

grâce au critère de d'Alembert

$$|g(k)| < C \Leftrightarrow |p| < 1$$

(le terme est dominé par le terme exponentiel)

2. Critère de Jury

Fastidieux de calculer tous les pôles

Peut-on déterminer la stabilité à l'aide d'un critère algébrique ?

Réponse oui : critère de Jury

Soit $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ (*)

$$- \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad \alpha_n \triangleq$$

$$- \alpha_{n-1} \left(\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \right) \quad \alpha_{n-1} \triangleq$$

$$- \alpha_{n-2} \left(\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \right) \quad \alpha_{n-2} \triangleq$$

$$\vdots$$

$$a_0^{(0)}$$

Quand $a_0 > 0$, les zéros de (*) sont tels que

$$|z_i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$a_0^{(i)} > 0$$

De surcroît, si $a_0^{(i)} \neq 0$, le nombre de coefficients négatifs est égal au nombre de zéros $|z_i| > 1$.

Exemple

$$A(z) = z^3 - 0.7z^2 - 0.5z + 0.3$$

(5)

(1)

0.7

0.5

-0.3

$$\alpha_3 =$$

$$\alpha_2 =$$

$$\alpha_1 =$$

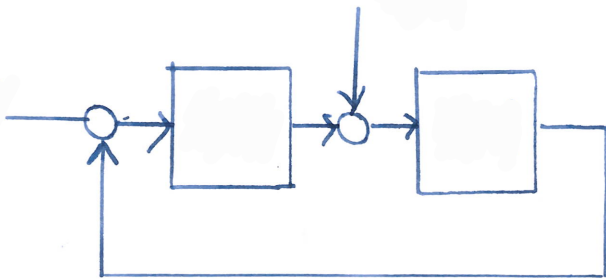
0.26

3. Critère de Nyquist

Critère simplifié: tous les pôles en boucle ouverte sont stables

Motivation: trouver un critère qui permette de quantifier la stabilité de la boucle fermée

$\Rightarrow$ en examinant la stabilité de la , on déduit



$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} =$$

$$\frac{Y(z)}{V(z)} =$$

La stabilité est déterminée par les zéros de en B.F

$1 + K(z)H(z)$ est une fonction rationnelle en z .

Le polynôme du dénominateur de $\frac{1}{1 + KH}$ détermine la stabilité

introduisons les polynômes: $K(z) = \frac{A}{R}$, B, S

$$H(z) =$$

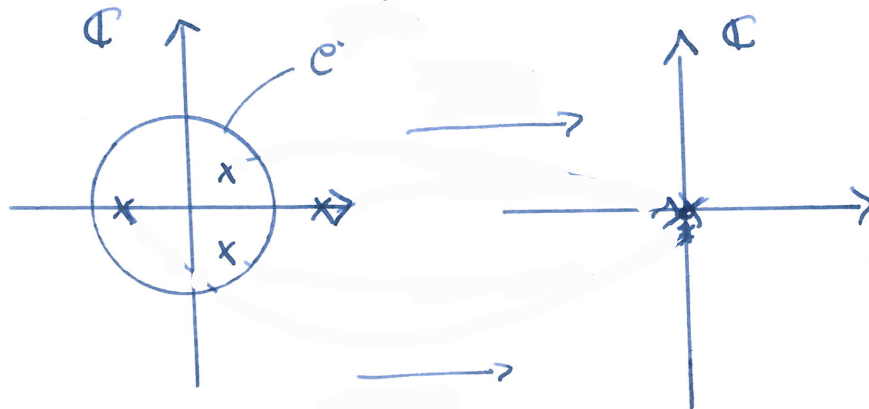
$$1 + K(z)H(z) = 1 + \dots = \dots$$

(6)

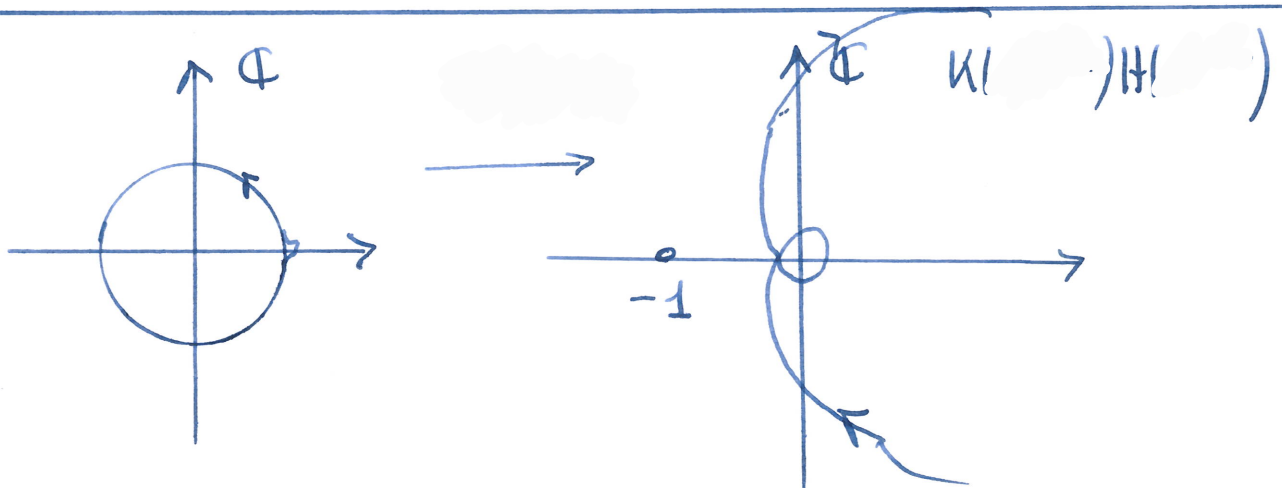
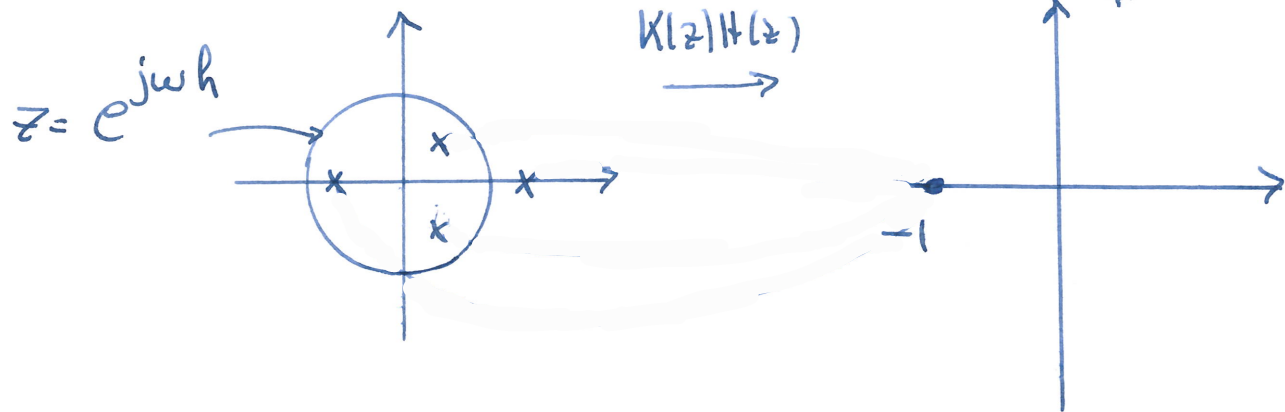
La boucle ouverte est déterminée par $K \cdot H =$

détermine la stabilité en B.O.

Illustration de l'effet de $1 + K(z)H(z)$ sur les zéros de AR+BS



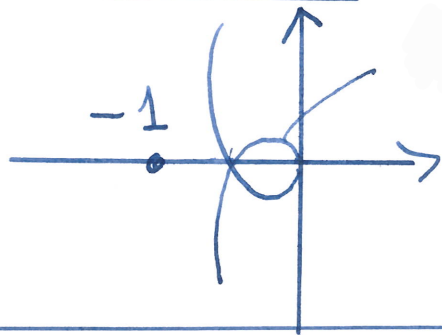
effet de $K(z)H(z)$



Critère de Nyquist

Supposons les pôles de $A \cdot R$ dans le cercle unité. (7)

stabilité BIBO



stab. bibo $\Leftrightarrow$

le point -1 n'est pas encerclé par $K|H|$

autrement dit, le point -1 est laissé à gauche.

critère généralisé:

AR possède p pôles instables

$K|H|$ encercle p fois -1 .

$\Leftrightarrow$

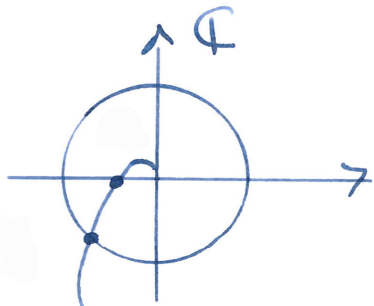
stabilité BIBO.

Démonstration cf livre basé sur le thm de Cauchy et le principe de l'argument

zéros de $1+KH \equiv$ pôles de $\frac{1}{1+KH} \rightarrow$ zéros de $AR+BS$

pôles de $1+KH \equiv$ zéros de $\frac{1}{1+KH} \rightarrow$ zéros de AR
= pôle B.O.

4. Robustesse

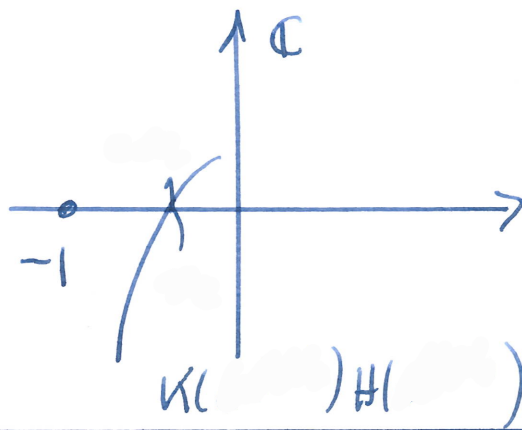


$K|H|$

Déf coupure de l'axe réel:
pulsation critique

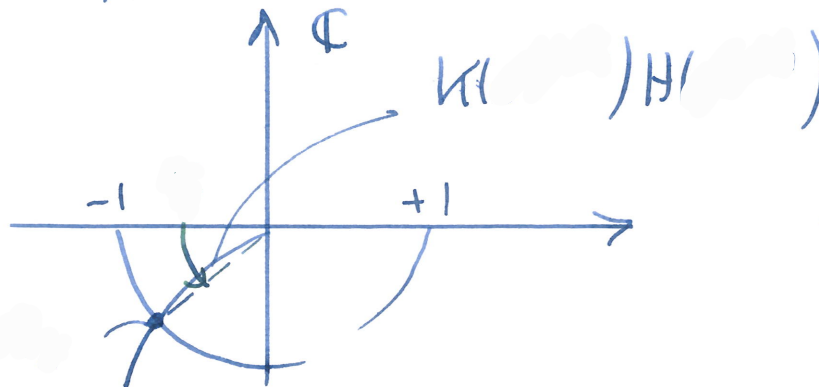
Déf coupure du cercle unité
pulsation de croisement

Marge de gain



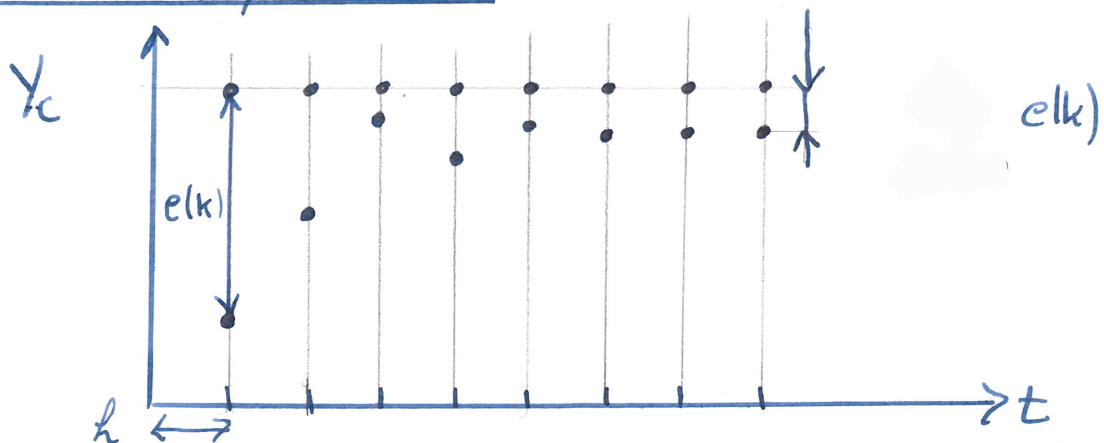
Marge de gain

Marge de phase



Marge de phase
angle

5. Ecartis permanents



$$E(z) = \quad \quad \quad Y_c(z) = \quad \quad \quad Y_c(z)$$

$$K(z)H(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^\ell A(z)}$$

Définition

ℓ : type ou classe du système en B.O.

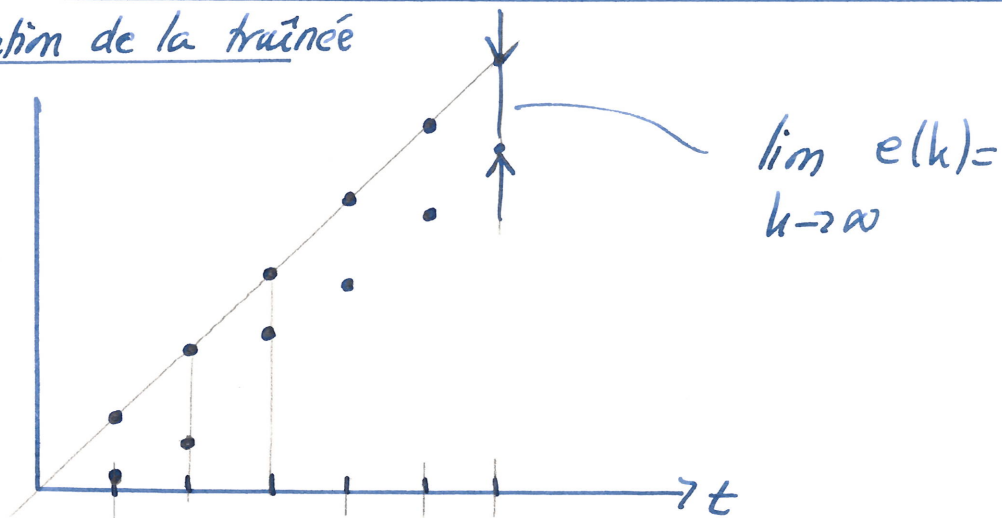
gain permanent en B.O

(9)

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(1)}{A(1)}$$

consigne type	$y_c(k) =$	$y_c(k) =$	$y_c(k) =$
0	statisme	∞	∞
1	0	traînée	∞
2	0	0	

Illustration de la traînée



se calcule directement à partir des transformées en z