

VI.6 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

1. Rappel/Résumé transt. en z / rép. harmonique / éch. à impulsions
2. Introduction / motivation
3. Transformée de Fourier d'un signal échantillonné
4. Échantillonnage de la transformée de Fourier $\Rightarrow$ T.F.D.
5. Reconstitution T.F.I et approximation
6. Reconstruction de la transformée en z et de la rép. harmonique

1.) Rappel, Résumé

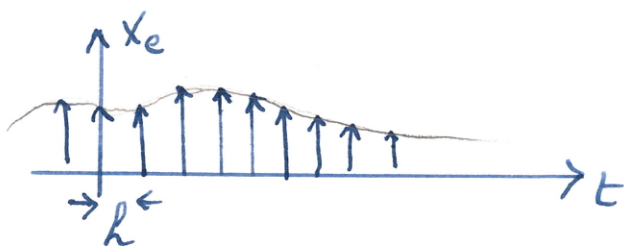
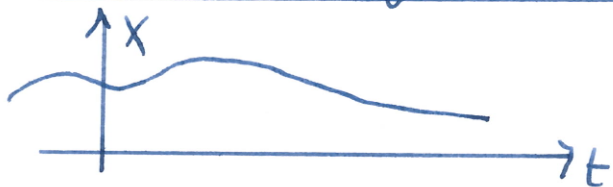
a.) Transformée en z

Soit $\{x(kh)\}_{k \geq 0}$, $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh) z^{-k}$

b. Réponse harmonique: $X(e^{j\omega h})$

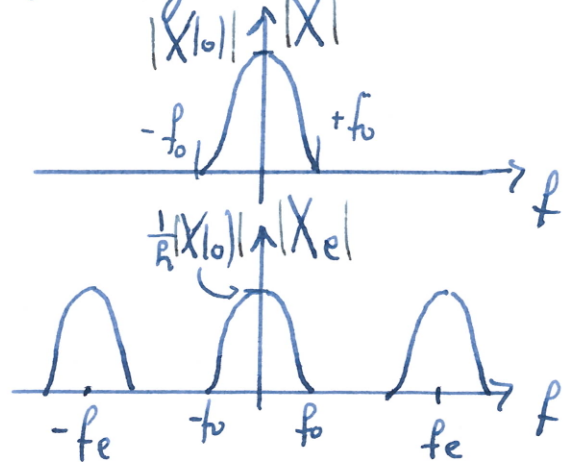
interprétation $X(e^{j\omega h}) \in \mathbb{C}$ et donne le gain (amplitude) $|X(e^{j\omega h})|$ et la phase $\arg(X(e^{j\omega h}))$ du signal de sortie lorsque l'entrée est $\{\sin(\omega kh)\}$. $X(z)$ est la fonct. de transfert.

c.) Échantillonnage à impulsions



$$f_e = \frac{1}{h}$$

d'un signal à bande limitée



2. Introduction et motivation

Obtenir une relation entre suite discrète, non seulement dans le temps (échantillonnage), mais également en fréquence.

L'échantillonnage à impulsions donne un spectre continu et périodique non représentable dans un ordinateur.

Peut-on le remplacer par un spectre discret? Conséquence?

3. Transformée de Fourier d'un signal échantillonné par impulsions. Soit $\{x(t)\}$ un signal à bande limitée,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \text{ a un support } [-f_0; +f_0].$$

On peut donc choisir f_e et intégrer uniquement entre $-\frac{f_e}{2}$ et $+\frac{f_e}{2}$ de telle sorte que

$$x(t) = \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} X(f) e^{+j2\pi f t} df \quad \text{pour autant que } \frac{f_e}{2} > f_0$$

En échantillonnant, $t = kh$,

$$x(kh) = \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} X(f) e^{+j2\pi f kh} df$$

inconvénient: numériquement non représentable car $X(f)$ est une fonction continue. Que se passe-t-il si on remplace $\int$ par une $\sum$?

Prenons des sous multiples entiers de f_e : $df = \frac{f_e}{N}$

on pose $f = \frac{f_e}{N} \cdot n$ pour $n = -\frac{N}{2}$ à $n = \frac{N}{2} - 1$

(sans perte de généralité, on considère N pair multiple de 2)

définition

$$x_p(t) \triangleq \frac{f_e}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X\left(\frac{f_e}{N} n\right) e^{j2\pi \frac{f_e}{N} n \cdot t}$$

et on écrit h dans le temps, $f_e = \frac{1}{h}$,

$$x_p(kh) = \frac{f_e}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X\left(\frac{f_e}{N} n\right) e^{j2\pi \frac{n}{N} k} \quad (\Delta)$$

Soit $x_e(t)$, le signal issu de l'éch. à impulsions



$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) \delta(t - kh)$$

Examinons $X_e(f)$

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{+j2\pi f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(kh) \delta(t-kh) \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(kh) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kh) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(kh) e^{-j2\pi f kh}$$

4. Echantillonnage de la transformée de Fourier •
échantillonnage fréquentiel $f = \frac{n}{N} f_e$ de $X_e(f)$

$$X_e\left(\frac{n}{N} f_e\right) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(kh) e^{-j2\pi \frac{n}{N} f_e kh}$$

$$X_e\left(\frac{n}{N} f_e\right) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x(kh) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Que se passe-t-il si on remplace $X\left(\frac{n}{N} f_e\right)$ par
 $h X_e\left(\frac{n}{N} f_e\right)$ dans Δ ?

$$X_{pe}(kh) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) e^{-j2\pi \frac{l \cdot n}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Définition
 $W_N \triangleq e^{j2\pi/N}$

$$W_N^{nk} = e^{+j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Phaseur discrétisé
en temps kh et
en fréquence $n \cdot \frac{1}{h}$

Propriétés

$$W_N^{lN} = 1, l \in \mathbb{Z}$$

$$W_N^{N/2} = -1$$

$$W_N^{h+N/2} = -W_N^h$$

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

orthonormalité

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} 1, & k = lN \\ 0, & k \neq lN \end{cases}$$

de telle sorte que

$$X_{pe}(kh) = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} e^{+j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$X_{pe}(kh) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j2\pi n(l-k)} \right)}_{=1 \text{ si } l-k=Nq \text{ } q \in \mathbb{Z}}$$

$$X_{pe}(kh) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x((iN+k)h)$$

Conclusion: Lorsqu'on échantillonne la représentation fréquentielle, on obtient un signal qui est la répétition périodique de période $N \cdot h$ du signal $x(kh)$. à condition que $x(kh)$ soit nul pour $k \geq N$ et pour $k < 0$.

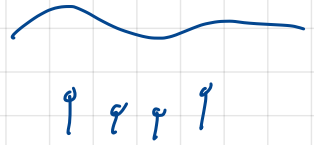
Définition: TFD, Transformée de Fourier discrète,

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

continu $x(t)$

discret $x(kh)$

éch. $t = kh$



continu
périodique $x_p(t)$

$$X\left(\frac{f_e}{N} \cdot n\right)$$

continu $x_e(t)$

discret $x_p(kh)$

éch. à impulsions. $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

$$t = kh \rightarrow x_p(t)$$



ne match pas $x(kh)$!
même lorsque $x(kh) = 0$ $k \neq 0, 1, 2, \dots, N-1$.

discret $x_{pe}(kh)$
périodique
si $x(k) \neq 0$
uniquement pour
 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

résultat

$$x_{pe}(kh) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[(iN+k)h]$$

$\Rightarrow$ Si $x(kh) = 0$ pour $k \geq N$ et pour $k < 0$
alors $x(kh) = x_{pe}(kh)$ pour $k = 0, 1, \dots, N-1$

3. Reconstitution TFD1 et approximation

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{+j 2\pi \frac{nk}{N}}$$

Transformée de
Fourier discrète
inverse

si $k=0, \dots, N-1$: signal fini ; si $k \in \mathbb{Z}$, signal périodique.

A cause de la périodicité fréquentielle, on peut également écrire

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{+j 2\pi \frac{nk}{N}}$$

si $k=0, \dots, N-1$: signal fini ; si $k \in \mathbb{Z}$ signal périodique.

6. Reconstruction de la transformée en z et de la réponse harmonique (d'un signal à limite dans le temps).

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) z^{-k} \quad (\text{transf. en } z \text{ d'un signal fini, limité dans le temps}).$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{+j 2\pi \frac{nk}{N}} \right) z^{-k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j 2\pi \frac{nk}{N}} z^{-k}}_{\text{progression géométrique}}$$

progression géométrique

$$\frac{W_N^{nN} z^{-N} - 1}{W_N^n z^{-1} - 1}$$

mais $W_N^{nN} = 1$ (cf. propriétés)

et donc

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \frac{z^{-N}-1}{W_N^n z^{-1}-1}$$

□

$$X(z) = \frac{z^{-N}-1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \frac{1}{W_N^n z^{-1}-1}$$

Remarque: pour un signal à durée finie (a-périodique)
la connaissance des N échantillons de Fourier $X(n)$
permet, par interpolation □, d'obtenir la transf en z associée.

Réponse harmonique à partir de la TFD

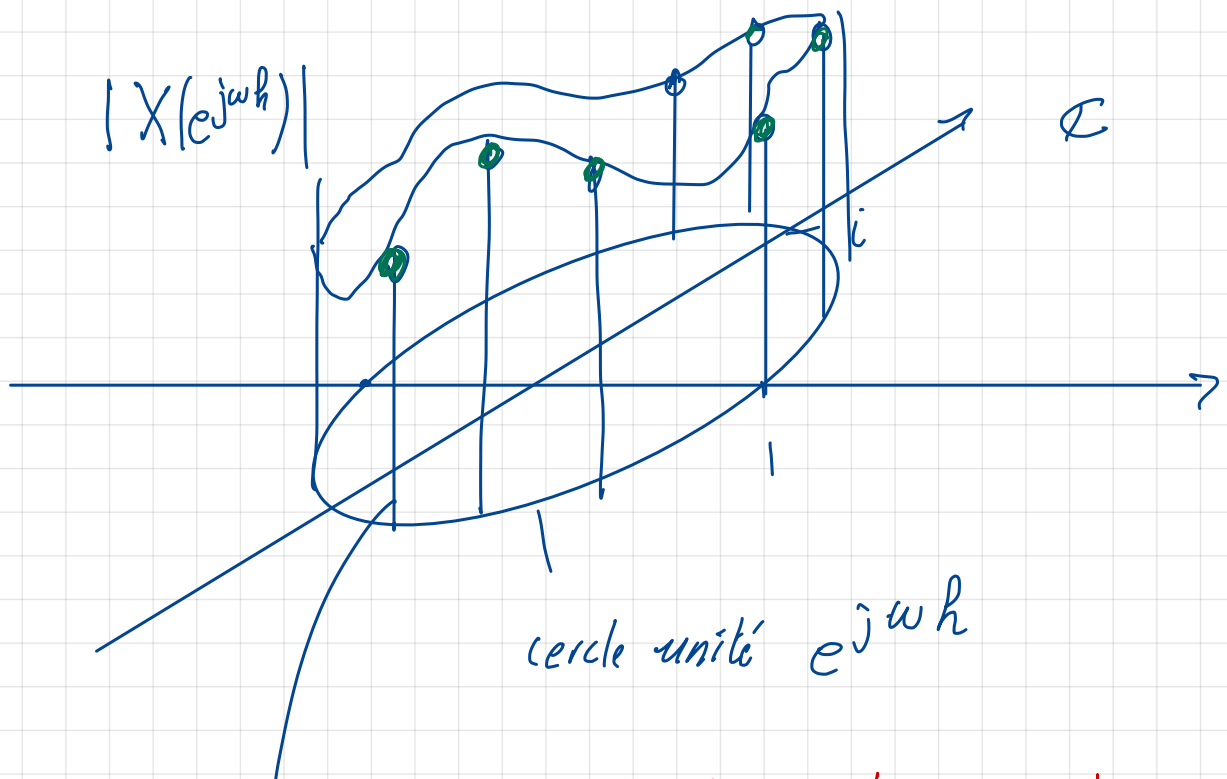
On cherche $X(e^{j\omega h})$

Il suffit de remplacer z dans □ par $e^{j\omega h}$

$$X(e^{j\omega h}) = \frac{e^{-j\omega h N}-1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \cdot \frac{1}{W_N^n e^{-j\omega h}-1}$$

en utilisant $e^{jx}-1 = e^{jx/2} (e^{jx/2} - e^{-jx/2}) = 2je^{jx/2} \sin(x/2)$

$$X(e^{j\omega h}) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \frac{\sin(\frac{\omega}{2} N)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \pi \frac{n}{N})} e^{j(\frac{\omega}{2} - \pi(N+\frac{n}{N}))}$$



TFD. lorsque $x(kh)=0$ $k \geq N$, $k < 0$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kh) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) z^{-k} + \underbrace{\sum_{k=N}^{+\infty} x(kh) z^{-k}}_{\text{si } 0}$$

alors
$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) z^{-k}$$

rép. harmonique
$$X(e^{j\omega h}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) e^{-j\omega k h}$$

et lorsque $\omega h = \frac{n}{2\pi} \cdot N$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) e^{-j \frac{kn}{2\pi} N}$$

TFD

dans ce cas particulier, $x(kh)=0$, $k \geq N$