

VI.6 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

1. Rappel/Résumé trans. : / rép. / éch. à
2. Introduction / motivation
3. Transformée de Fourier d'un signal
4. Échantillonnage de la $\Rightarrow$
5. Reconstitution et à
6. Reconstruction de la transformée en et de la rép.

1.) Rappel, Résumé a.) Transformée en z

Soit

, $X(z)$

b. Réponse harmonique:

interprétation

et donne le

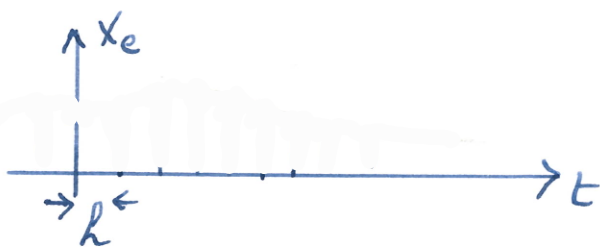
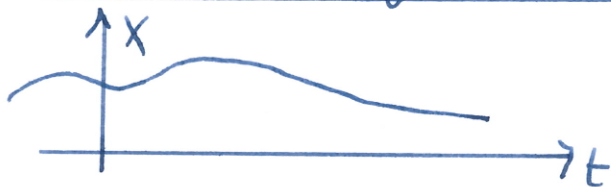
et la

du signal de

l'origine

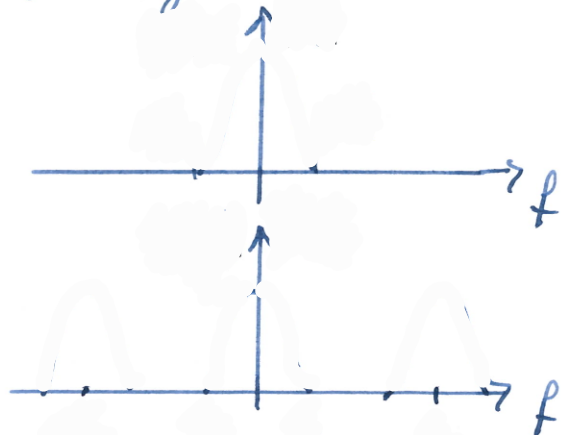
l'entrée

c.) Échantillonnage à impulsions



$T_e =$

d'un signal à bande limitée



2. Introduction et motivation

Obtenir une relation entre suite discrète, non seulement dans le , mais également

L'échantillonnage à donne un spectre et non représentable

Peut-on le remplacer par discret? Conséquence?

3. Transformée de Fourier d'un signal

soit $\{x(t)\}$ un signal à

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \text{ a un support}$$

On peut donc choisir f_e et intégrer uniquement entre

et de telle sorte que

$$x(t) = \int df \quad \text{pour autant que}$$

En échantillonnant, $t = kh$,

$$x(kh) =$$

inconvénient: numériquement non car
est une fonction. Que se passe-t-il
si on remplace par ?

Prenons des sous multiples entiers de f_e :

on pose $f = n$ pour $n = \bar{a}$

(sans perte de généralité, on considère N pair multiple de 2)
définition

$$x_p(t) \triangleq$$

et on décroître dans le temps, $f_e = \frac{1}{h}$,

$$x_p(kh) =$$



Soit $x_e(t)$, le signal issu de l'éch. à impulsions



$$x_e(t) = \delta(t - kh)$$

Examinons $X_e(f)$

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{j2\pi ft} dt =$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_e(hT) e^{j2\pi fhT}$$

4. Echantillonnage de la transformée de Fourier •
échantillonnage $f = \frac{n}{N} f_e$ de

$$X_e(f) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_e(hT) e^{j2\pi fhT}$$

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty}$$

Que se passe-t-il si on remplace $X(\quad)$ par
 $\frac{1}{N} X_e(\quad)$ dans Δ ?

$$X_{pe}(kh) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_e(nT) e^{j2\pi knT}$$

Définition
 $W_N \triangleq e^{j2\pi/N}$

Propriétés

$$W_N^{nk} = e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$W_N^{lN} = 1, l \in \mathbb{Z}$$

$$W_N^{N/2} = -1$$

Phaseur discrétisé
en temps kh et
en fréquence $n \cdot \frac{1}{h}$

$$W_N^{h+N/2} = -W_N^{h/2}$$

$$W_N^2 = e^{j4\pi/N}$$

orthonormalité

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

de telle sorte que

$$X_{pe}(kh) = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} e^{+j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$X_{pe}(kh) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} e^{+j2\pi \frac{kn}{N}} \right)}_{=1 \text{ si } k=l}$$

$$X_{pe}(kh) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lh) \delta(k-l)$$

Conclusion: Lorsqu'on échantillonne la représentation fréquentielle, on obtient un signal qui est la $N \cdot h$ du signal.

Définition: TFD, Transformée de Fourier discrète,

$$X(n) =$$

3. Reconstitution TFD1 et

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Transformée de
Fourier discrète
inverse

si $k=0, \dots, N-1$: signal ; si $k \in \mathbb{Z}$, signal

À cause de la périodicité fréquentielle, on peut
également écrire

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Si $k=0, N-1$: signal ; si $k \in \mathbb{Z}$ signal

6. Reconstitution de la transformée en z et de la
réponse harmonique (d'un signal à

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (\text{transf. en } z \text{ d'un signal fini}).$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \right) z^{-k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e^{j2\pi \frac{nk}{N}} z^{-k}}_{\text{progression géométrique}}$$

mais $W_N^{nN} = 1$ (cf. propriétés)

et donc

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{1}{z^{-n}}$$

□

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{1}{z^{-n}}$$

Remarque: pour un signal (ou la connaissance des N échantillons de Fourier $X(n)$) permet, □, d'obtenir la

Réponse harmonique à partir de la TFD

On cherche $X(e^{j\omega h})$

Il suffit de remplacer z dans □ par $e^{j\omega h}$

$$X(e^{j\omega h}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{1}{e^{-jn\omega h}}$$

en utilisant $e^{jx} - 1 = e^{jx/2} (e^{jx/2} - e^{-jx/2}) = 2je^{jx/2} \sin(x/2)$

$$X(e^{j\omega h}) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) \frac{1}{e^{-jn\omega h}} e^{jn\omega h}$$