VI Fonction de transfert harmonique
Réponse harmonique

1. Définition de la réponse harmonique
2. Diagramme de Bode et Nyquist "à la main"
3. Echantillonneur à impulsions et impact du D/A
4. Réponse harmonique (analogique) en absence d'algorithme
5. Réponse harmonique (analogique) en présence d'algorithmes

---

1. Définition de la réponse harmonique

Grosso modo : réponse à un régime sinusoïdal

on suppose que tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité. (syst. asymptot. stable)

Etudions

$$\mathcal{Z}(\{e^{j\omega kh}\}) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z) \quad ?$$

$$\{e^{j\omega kh}\} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-e^{j\omega h}}$$

Lorsque $U(z) = \dfrac{z}{z-e^{j\omega h}}$ alors $Y(z) = G(z)\dfrac{z}{z-e^{j\omega h}}$

On suppose les pôles distincts de $e^{j\omega h}$ et tous tels que $|z_i| < 1$

Décomposition en éléments simples : $Y(z) = C_1 \dfrac{z}{z-z_1} + \dots + C_n \dfrac{z}{z-z_n} + C \cdot \dfrac{z}{z-e^{j\omega h}}$

Comme les $|z_i| < 1$ Rappel $\{e^{-akh}\} \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-e^{-ah}}$

et donc $\{z_i^k\} \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-z_i}$

$$\lim_{k\to\infty} z_i^k = 0 \quad \text{car} \quad |z_i| < 1$$

autrement dit, comme les termes associés $\frac{c_i}{z - z_i}$ entraînent une contribution qui disparaît asymptotiquement, il ne reste que la contribution $C \frac{z}{z - e^{j\omega h}}$ $C \in \mathbb{C}$. Calcul de C :

$$C = \lim_{z \to e^{j\omega h}} \frac{z - e^{j\omega h}}{z} Y(z) = \lim_{z \to e^{j\omega h}} \frac{z - e^{j\omega h}}{z} G(z) \frac{z}{z - e^{j\omega h}}$$

$$\boxed{C = G(e^{j\omega h})}$$

Le régime permanent prend ainsi la forme

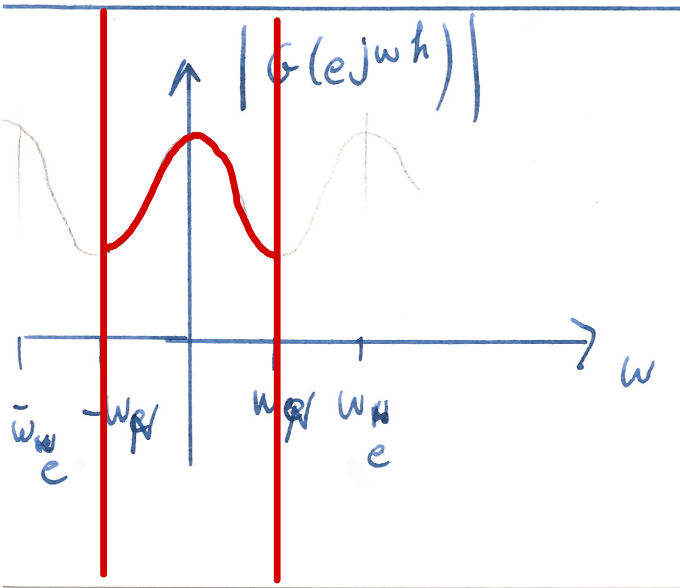
$$\{ G(e^{j\omega h}) e^{j\omega k h} \}$$

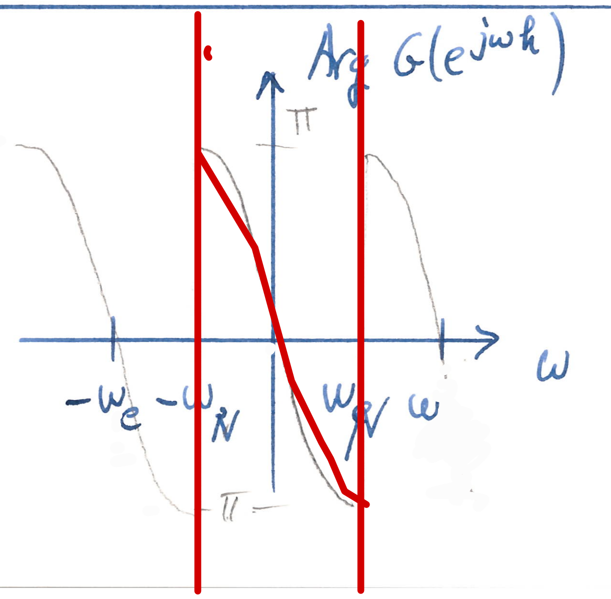
Par linéarité :

$$\{\sin(\omega k h)\} \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow |G(e^{j\omega h})| \sin[\omega k h + \mathrm{Arg}(G(e^{j\omega h}))]$$

<u>Définition</u> : Le régime permanent est appelé la réponse harmonique

et la fonction de transfert harmonique est $G(e^{j\omega h})$

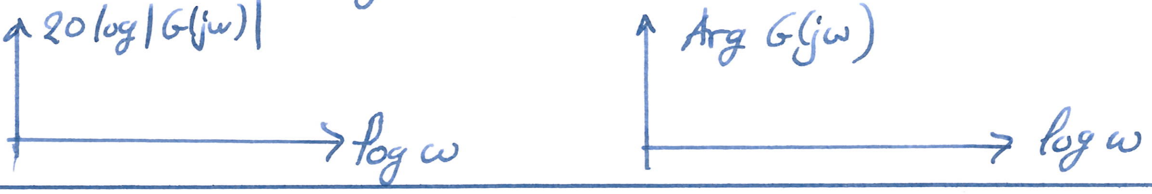




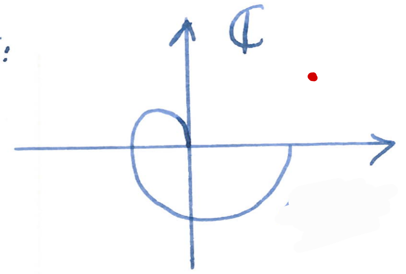
2. Diagramme de Bode et Nyquist (à la main)

Rappel : En analogique, $G(s)$ est fraction rationnelle en s et on remplace par $j\omega$ ce qui rend possible un traçage asymptotique des diagrammes de Bode par la méthode des segments de droite

Bode :



Nyquist :



En discret, $G(e^{j\omega h})$ est fraction rationnelle de $e^{j\omega h}$ et non de $j\omega$.

Existe-t-il un moyen de contourner cette difficulté ?

Changement de variable

$$z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} = \frac{1 + s\,h/2 + \cdots}{1 - s\,h/2 + \cdots}$$

Posons $$z = \frac{1 + W\frac{h}{2}}{1 - W\frac{h}{2}}$$ avec $W \in \mathbb{C}$

dont la transformée réciproque $$W = \frac{2}{h}\,\frac{z-1}{z+1} \qquad z \neq -1$$

Lorsque $z = e^{j\omega h}$

$$W = \frac{2}{h}\,\frac{e^{j\omega h} - 1}{e^{j\omega h} + 1} = \frac{2j}{hj}\,\frac{e^{j\omega h/2} - e^{-j\omega h/2}}{e^{j\omega h/2} + e^{-j\omega h/2}}$$

$$= \frac{2}{h} j \,\frac{\sin(\omega h/2)}{\cos(\omega h/2)} = \frac{2}{h} j \, tg\left(\omega \frac{h}{2}\right)$$

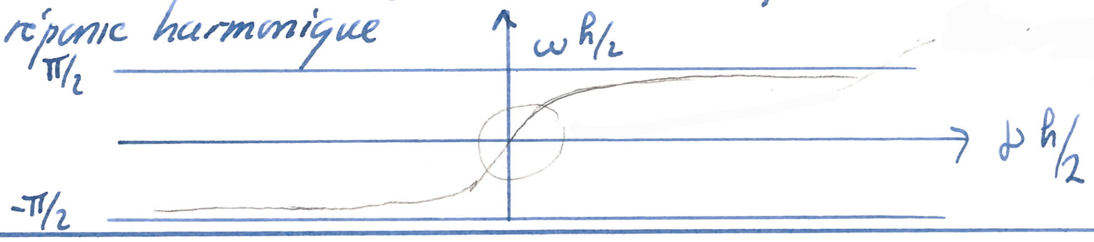
Posons $$\Omega \triangleq \frac{2}{h} tg\left(\omega \frac{h}{2}\right) \Rightarrow W = j\Omega$$

(valable lorsque $z = e^{j\omega h}$)

<u>Remarque:</u> Comme $G(z)$ est fraction rationnelle de z, et $G(z) = G'(W)$,

~~est~~ est fraction rationnelle de W

et donc fraction rationnelle de $j\nu$ quand on s'intéresse à la réponse harmonique



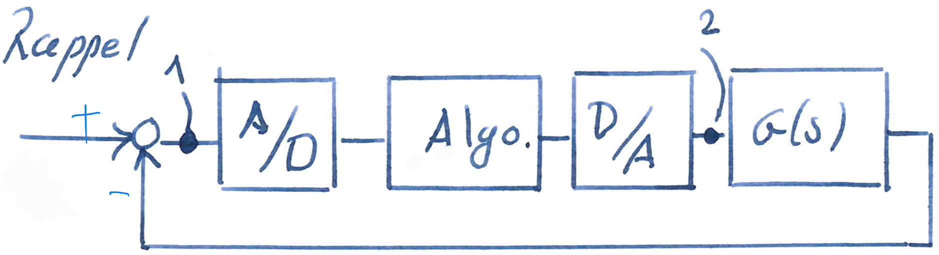
quand $\frac{h\omega}{2} \to \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{h} \triangleq \omega_N$ alors $\nu \to +\infty$

<u>Interprétation:</u> On change la paramétrisation de telle sorte que l'on fait disparaître la périodicité de $G(e^{j\omega h})$. Pour des valeurs de ω autour de 0, il y a peu de différence entre ω et ν ainsi $G'(j\nu) \cong G(e^{j\omega h})$

On trace ainsi le diagramme de Bode asymptotique en utilisant $G'(j\nu)$.

3. Echantillonneur à impulsions et modèle du D/A

Rappel

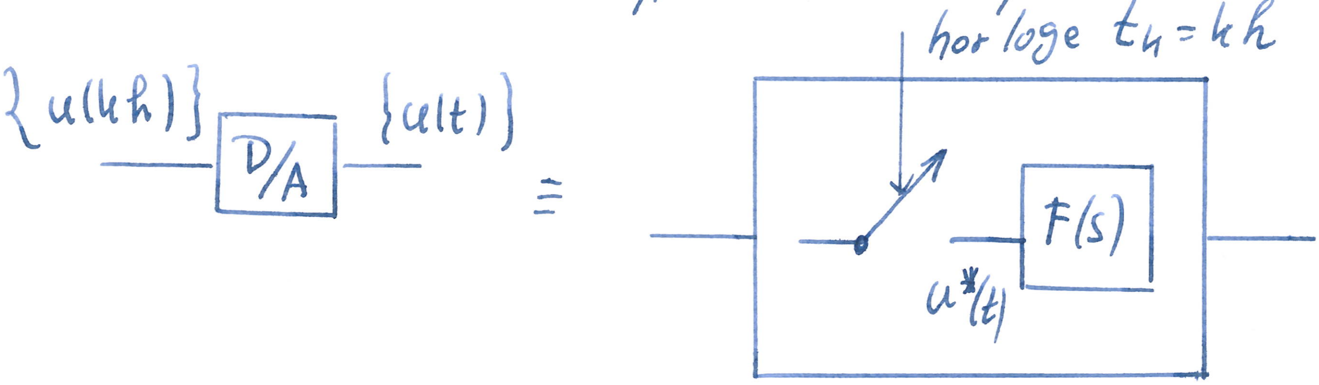


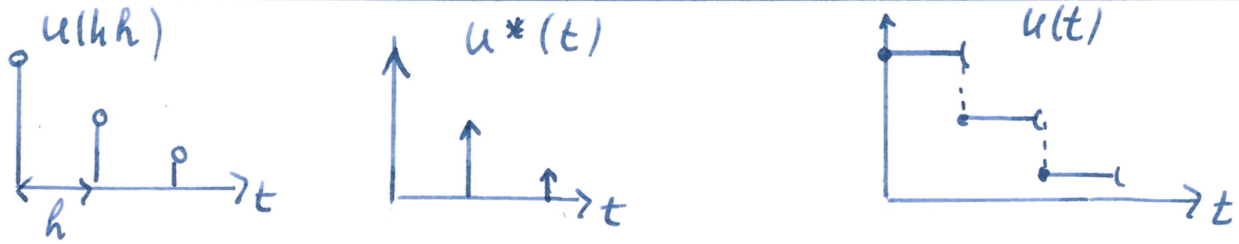
Monde analogique entre 1 et 2. $\quad$ $1 \to 2$, transfert analogique

⚠ il n'est pas linéaire de dimension finie.

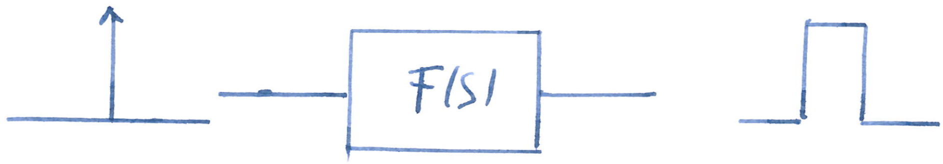
Modèle du D/A

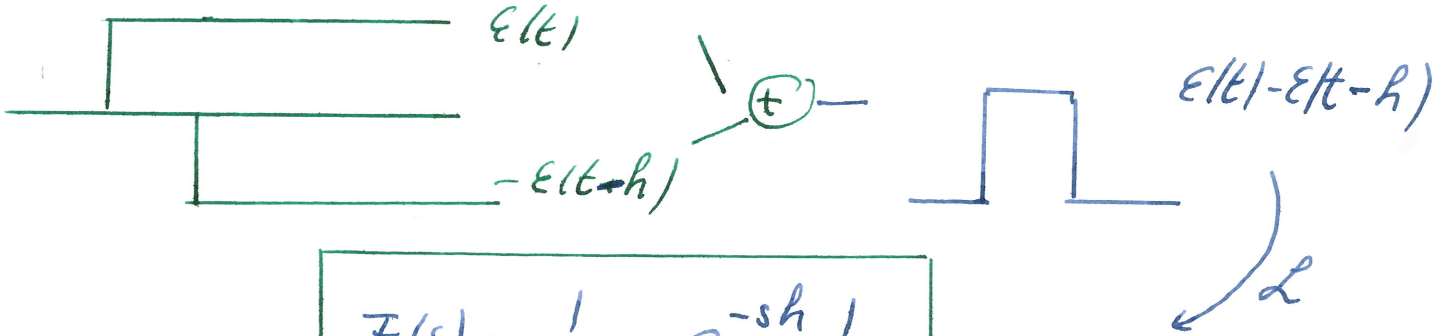
(effet non linéaire)





La fonction de transfert $F(s)$ et sa réponse impulsionnelle :

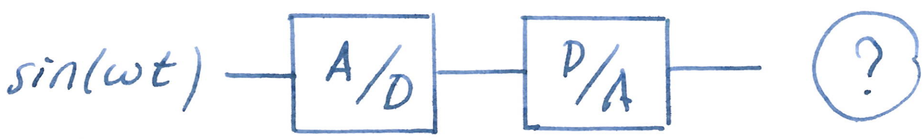


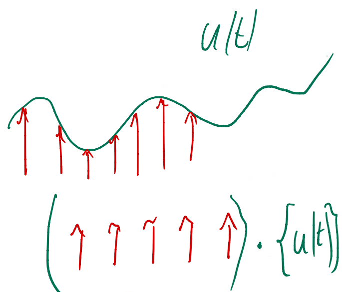


$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s} - e^{-sh}\frac{1}{s}}$$

Thm du retard.

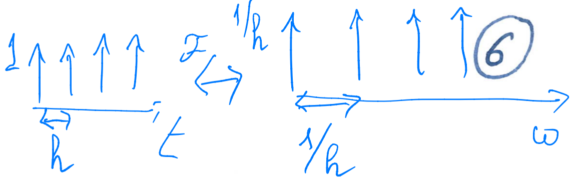
4. Réponse harmonique en absence d'algorithme





l'échantillonneur à impulsions consiste à multiplier $u(t)$ par $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kh)$

6

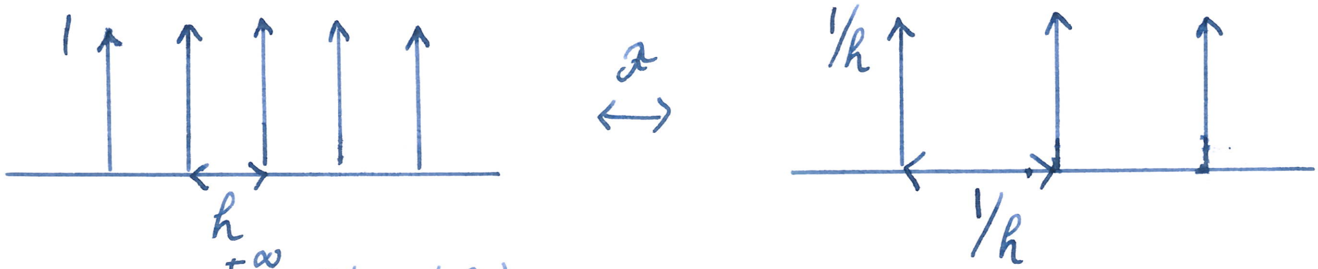


$$u(kh) = \sin(\omega k h)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kh)\,\delta(t-kh) \triangleq u^*(t)$$

analyse de Fourier

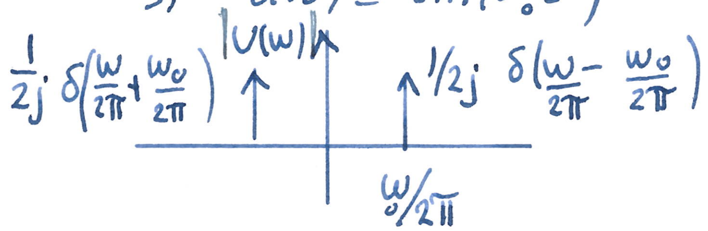
$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kh) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}-\frac{k}{h}\right)}$$



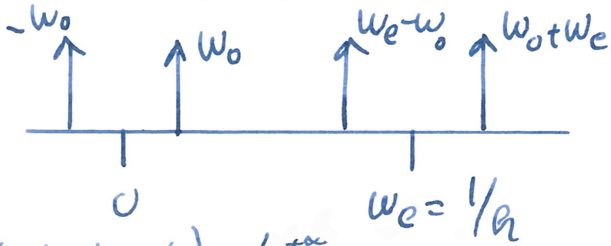
$$u^*(t) = u(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kh) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} U(\omega) * \left(\frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}-\frac{n}{h}\right)\right)$$

produit — convolution

Si $u(t) = \sin(\omega_0 t)$



$$U(\omega) * \left(\frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{\omega}{2\pi}-\frac{n}{h}\right)\right)$$



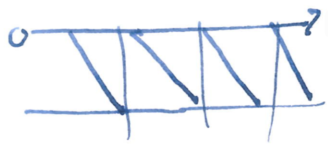
$$u^*(t) = \frac{1}{h}\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{h}\sum_{k=}^{+\infty}\sin(\omega_0 t + k\omega_e t) - \frac{1}{h}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sin(-\omega_0 t + k\omega_e t)$$

$$F(e^{j\omega}) = \frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega h}\right) = \frac{2j\cdot 1}{j\cdot\omega}e^{-j\omega\frac{h}{2}}\;\frac{e^{+j\omega h}-e^{-j\omega h}}{2j}$$

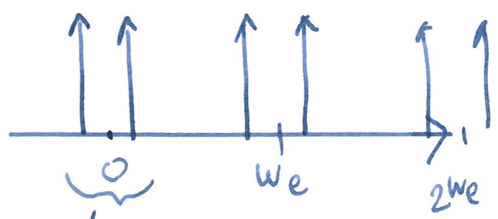
$$= e^{-j\omega h/2}\,\frac{2}{\omega}\sin\left(\omega\frac{h}{2}\right) = e^{-j\omega h/2}\cdot h\cdot\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2}$$

$|F(e^{j\omega h})|$

$\arg(F(e^{j\omega h}))$



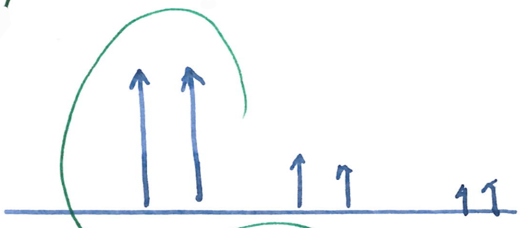
⚠ dans la video j'ai supprimez h — ok



$\frac{1}{h}\sin(\omega t)$

$$\boxed{\frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega h}\right)} = e^{-j\omega h/2}\cdot h \cdot \frac{\sin(\omega \frac{h}{2})}{\omega h/2}$$

fondamentale



$$\frac{1}{h}\, h\, \frac{\sin(\omega \frac{h}{2})}{\omega h/2}\,\sin\left(\omega t - \frac{\omega h}{2}\right)$$

pour la fondamentale ≈ 1

Pour la fondamentale $\cong e^{-j\omega h/2} \triangleq F'(j\omega)$ nouvelle fonction de transfert harmonique

valable lorsque $\omega \ll \frac{\pi}{h} = \omega_N$

$$\text{—}\boxed{A/D}\text{—}\boxed{D/A}\text{—} \equiv \boxed{F'(j\omega)}$$

Grosso modo se comporte comme un retard d'une demi période d'échantillonnage!

---

3. Réponse harmonique analogique en d'un algorithme

$$\sin(\omega t) \rightarrow 1 \bullet\text{—}\boxed{A/D}\text{—}\boxed{-K(z)}\text{—}\boxed{D/A}\text{—}\bullet\, 2$$

$$-|K(e^{j\omega h})|\,\sin(\omega k h + \operatorname{Arg} K(e^{j\omega h}))$$

$\equiv$

$$\text{—}\boxed{-K(e^{sh})}\text{—}\boxed{A/D}\text{—}\boxed{D/A}$$

$$-|K(e^{j\omega h})|\,\sin(\omega t + \operatorname{Arg} K(e^{j\omega h}))$$

$$-|K(e^{j\omega h})|\,\sin(\omega k h + \operatorname{Arg} K(e^{j\omega h}))$$

Pour la fondamentale

$\approx$ $\sin(\omega t)$ en 1 et en 2

$$-|K(e^{j\omega h})| \sin\left(\omega t + \operatorname{Arg} K(e^{j\omega h}) - \omega \frac{h}{2}\right)$$