IV. Transformée en Z

1. Introduction
2. Définition de la transformée
3. Propriétés
4. Transformée inverse

1. Introduction

1.1. opérateur et polynômes. Soit la suite

$$\{\ldots, x(-2h), x(-h), x(0), x(h), x(2h), \ldots\}$$

on lui associe un nouvel objet par isomorphisme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh)\, q^{-k}$$

1.2. C'est un série formelle en q^{-1}, qui est un symbole

Avantage: Pour les suites finies, la convolution se transforme en une multiplication de polynômes. On avait la même propriété avec l'opérateur d'avance q. Exemple:

$$\{1,2,1\} * \{1,3\} = ? \qquad x(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} x_1(\ell)\, x_2(k-\ell) = x_1 * x_2$$

$$(1+2q^{-1}+q^{-2})(1+3q^{-1}) = 1+2q^{-1}+q^{-2}+3q^{-1}+6q^{-2}+3q^{-3}$$

$$\{1,5,7,3\} \leftarrow 1+5q^{-1}+7q^{-2}+3q^{-3}$$

1.3.Progression géométrique

Soit a une variable réelle ou complexe

$$(1+a+a^2+\ldots+a^N)(1-a) = ?$$

$$= 1+a+a^2+\ldots+a^N$$
$$-a-a^2-\cdots-a^N-a^{N+1}$$

$$= 1-a^{N+1}$$

Série infinie Si $|a| < 1$, $\lim_{N\to\infty} a^N = 0$, ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} \qquad \text{car } \lim_{N\to\infty} a^N = 0$$

Cette idée est utilisée pour remplacer les suites infinies d'échantillons par des fractions.

Notation: Dorénavant $\{0,\ldots,0,x(0),x(h),x(2h),\ldots\} = \{x(kh)\}$, autrement dit, on a systématiquement $x(kh) = 0$, $k < 0$.

Problème

Il y a un problème lorsque $|a| > 1$ car la progression géométrique est divergeante.

2. Transformée en Z

Définition: La transformée en Z d'une suite

$$\{x(kh) | k \geq 0\}$$

est donnée par la série infinie, avec z comme variable complexe:

$$\mathcal{Z}(\{x(kh)\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kh)\, z^{-k}$$

Exponentielle. Rappel en Laplace

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

Soit $\{e^{akh}\}$. Posons

$$\mathcal{Z}\left(\{e^{akh}\}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{akh} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}^k$$

On reconnaît une progression géométrique avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}^k$ avec

$$\boxed{\tilde{a} = e^{ah} z^{-1}}$$

Convergence de la progression géométrique quel que soit a (même lorsque $|a| > 1$). La série converge lorsque $|e^{ah} z^{-1}| < 1$, autrement dit lorsque

$$|e^{ah} z^{-1}| < |e^{ah}||z^{-1}| = |e^{ah}| \frac{1}{|z|} < 1$$

La région de convergence est l'extérieur du disque de rayon r donné par

$$|z| > r \triangleq |e^{ah}|$$

Résultat

$$\mathcal{Z}(\{e^{akh}\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{akh} z^{-k} = \frac{1}{1-e^{-ah} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{ah}}$$

On peut s'interroger sur le domaine des valeurs de a qui est associé à une suite bornée d'échantillons.

Premier ordre

Dans le domaine analogique

$$\frac{1}{s+a} \qquad a \in \mathbb{R} \text{ stable } \Leftrightarrow a \leq 0$$

Dans le domaine discret

$$\frac{z}{z-e^{+ah}}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{stable}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|a| \leq 1$$

Cosinus

On peut utiliser le résultat de l'exponentielle pour un paramètre $a \in \mathbb{C}$ pour déterminer la transformée en Z.

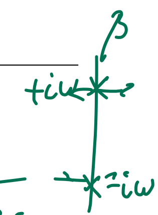
$$\cos(\omega kh) = \frac{e^{j\omega kh} + e^{-j\omega kh}}{2}$$

transformée en Z

$$\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{j\omega h}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-j\omega h}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\, z\,(z-e^{+j\omega h}) + \frac{1}{2}\, z\,(z-e^{-j\omega h})}{(z-e^{j\omega h})(z-e^{-j\omega h})}$$

$$= \frac{z^2-\cos(\omega h)\, z}{z^2-2\cos(\omega h)\, z+1}$$



$$\frac{s}{s^2+\omega^2+\beta s}$$

Sinus

De manière similaire

$$\sin(\omega kh)=\frac{e^{j\omega kh}-e^{-j\omega kh}}{2j}$$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2+\beta s}$$

qui conduit à

$$\frac{\sin(\omega h)\, z}{z^2-2\cos(\omega h)\, z+1}$$

β petit

3. Propriétés

3.1 linéarité

$$\mathcal{Z}[a\{x_1(kh)\}+b\{x_2(kh)\}]$$
$$= a\mathcal{Z}(\{x_1(kh)\})+b\mathcal{Z}(\{x_2(kh)\})$$
$$= aX_1(z)+bX_2(z)$$

3.2 convolution

$$\{x_1(kh)\}*\{x_2(kh)\} \longleftrightarrow X_1(z)\cdot X_2(z)$$

Attention: le domaine de convergence est l'intersection des domaines de convergence de $\{x_1(kh)\}$ et $\{x_2(kh)\}$

$$\{x\} * \{y\} = \sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell)\, y(k-\ell)$$

$$Z(\{x\} * \{y\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell) y(k-\ell)\; z^{-k}$$

$m = k - \ell \qquad k = m + \ell$

$$\sum_{m+\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell)\, y(m)\, z^{-m-\ell} \right)$$

$$\sum_{m+\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell) \dots y(m)\, z^{-m} \right) z^{-\ell} = (*)$$

Remarque Comme $\ell > 0$

$$\sum_{m+\ell=0}^{+\infty} (\dots) = \sum_{m=-\ell}^{-1} (\dots) + \sum_{m=0}^{+\infty} (\dots)$$

Comme $y(m) = 0$, pour $m < 0$

$$\sum_{m=-\ell}^{-1} (\dots) = 0,$$ et donc

$$(*) \rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell) \dots y(m)\, z^{-\ell} \right) z^{-m}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} y(m)\, z^{-m} \right)}_{Z(\{y\})} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} x(\ell)\, z^{-\ell} \right)}_{Z(\{x\})}$$

3.3 Décalage temporel

$$\text{retard} \quad \mathcal{Z}(\{x(kh-dh)\}) = z^{-d}X(z)$$
$$\text{avance} \quad \mathcal{Z}(\{x(kh+dh)\}) = z^{d}X(z) - \sum_{k=0}^{d-1} x(kh)z^{d-k}$$

La transformée en Z est définie pour la collection d'échantillons $\{x(kh)|k \geq 0\}$ et suppose par définition $x(kh) = 0$ pour $k < 0$. Lors du retard, les zéros sont décalés à droite (partie positive des indices) et cela n'affecte pas la propriété que $\cancel{x'(k) = 0}$ pour $k < 0$.

$x(kh-dh) = 0$ pour $k < 0$

Par contre, lors de l'avance, les d premiers échantillons (potentiellement non nuls) arrivent dans la partie négative des indices et sont considérés nuls dans la définition de la transformée en Z. Il faut donc soustraire les échantillons décalés dans la partie négative $k < 0$ après avance.

Démonstration pour l'opérateur d'avance

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kh+dh)z^{-k} = z^{d}\sum_{k=0}^{\infty} x(kh+dh)z^{-k-d} \qquad k' = k+d$$

$$= z^{d}\sum_{k'=d}^{\infty} x(k'h)z^{-k'} = z^{d}\sum_{k'=0}^{+\infty} x(k'h)z^{-k'} - z^{d}\sum_{k'=0}^{d-1} x(k'h)z^{-k'}$$

$$= z^{d}X(z) - \sum_{k=0}^{d-1} x(kh)z^{-k+d}$$

3.4 Dérivation complexe

$$\mathcal{Z}(\{kh\,w(kh)\}) = -hz\frac{dW}{dz}$$

rayon de convergence inchangé

Démonstration

$$\frac{d}{dz} z^2 = \frac{d}{dz} z\cdot z = 1\cdot z + z\cdot 1 = 2z$$

$$\frac{d}{dz} z^{-k} = -k z^{-k-1}$$

$$-hz\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} x(kh)z^{-k} = +hz\sum_{k=0}^{\infty} k\,x(kh)\,z^{-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} kh\,x(kh)\,z^{-k} = \mathcal{Z}\left(\{kh\,x(kh)\}\right)$$

3.5 Mise à l'échelle

$$\mathcal{Z}\left(\{a^{kh}\,x(kh)\}\right) = X\left(\frac{z}{a^h}\right)$$

rayon de convergence $|a|^h r$ avec r celui de $X(z)$. La démonstration s'obtient en appliquant la définition de la transformée en Z.

3.6 Valeur finale

$$\lim_{k\to+\infty} x(kh) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}X(z) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z)$$

Démonstration: l'idée est d'avancer la suite (série) et soustraire la suite (série)

$$\lim_{n\to\infty}\left(x(0)-0+x(h)-x(0)+\cdots+\underline{x(nh)}-x(nh-h)\right) = \lim_{n\to\infty} x(nh)$$

Cette opération se résume par $(1-z^{-1})X(z)$ et pour n'avoir plus la variable z devant l'échantillon, dans l'expression de la transformée en Z, on remplace z par 1.

Valeur finale : $(1-z^{-1})\, X(z) =$

$$x(0) + x(1) z^{-1} + \dots\ x(n) z^{-n} + \dots$$
$$- x(0) z^{-1} - x(1) z^{-2} + \dots - x(n) z^{-n-1} - \dots$$

$$\{x(0),\ x(1),\ x(2),\ \dots\}$$
$$-\ \{0,\ x(0),\ x(1),\ \dots\}$$

$$x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(x(k) - x(k-1)\big)\, z^{-k}$$

$$\lim_{z\to 1} \rightarrow\ = x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(x(k) - x(k-1)\big)$$

$$\lim_{N\to\infty} x(0) + \sum_{k=1}^{N} \big(x(k) - x(k-1)\big) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \Big[\, x(0) + \big(x(1) - x(0)\big) + \big(x(2) - x(1)\big) + \dots + \big(\boxed{x(N)} - x(N-1)\big) \Big] =$$

$$\lim_{N\to\infty} x(N) = \lim_{k\to\infty} x(kh)$$

Valeur initiale $\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)\, z^{-k} = x(0) + x(h) z^{-1} + x(2h) z^{-2} + \dots$$

$$= x(0) + 0 + 0 + \dots$$

$$= x(0)$$

3.7 accumulation

$$\mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{l=0}^{k} x(lh) | k \geq 0\right\}\right) = \frac{z}{z-1} X(z)$$

Le domaine de convergence est l'intersection entre celui de $\{1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ et $\{x(kh)\}$.

$$\left\{\sum_{l=0}^{k} x(lh)\right\} = \{1, 1, \cdots\} * \{x(kh)\} \leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z)$$

progression géométrique $\{e^{akh}\}$ avec $a = 0$

$$\updownarrow \quad \frac{z}{z-e^{ah}} = \frac{z}{z-1}$$

3.8 différence

$$\mathcal{Z}\{x(kh) - x(kh-h) | k \geq 0\} = \frac{z-1}{z} X(z)$$

Le rayon de convergence demeure inchangé.

$$Z(\{x(kh)\} - \{x(kh-h)\}) = X(z) - z^{-1} X(z) = (1 - z^{-1}) X(z) = \frac{z-1}{z} X(z)$$

4. Transformée en Z inverse

4.1 décomposition en éléments simples pôles simples réels:

$$X(z) = c_0 + c_1 \frac{z}{z-1} + \cdots + c_n \frac{z}{z-p_n} \qquad p_i \in \mathbb{R} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$c_0 = X(0) \qquad c_i = \lim_{z \to p_i} \frac{z-p_i}{z} X(z)$$

pôles complexes:

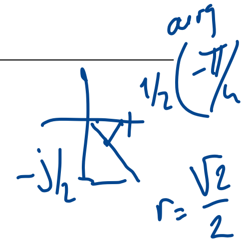
$$c = \lim_{z \to p} \left(\frac{z-p}{z} X(z)\right) \qquad c \in \mathbb{C}$$

En posant $p = r\, e^{j\omega}$ et $c = x + jy$, il y a forcément un pôle complexe conjugué $\bar{p}$ dont le résidu est le complexe conjugué $\bar{c} = x - jy$ de telle sorte que...

la progression géométrique associée peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} w(kh) &= (x+jy)\, r^k e^{j\omega k} + (x-jy)\, r^k e^{-j\omega k} \\ &= r^k(2x\cos(\omega k) - 2y\sin(\omega k)) \end{aligned}$$

Exemple:



$$W(z) = \frac{2z^2+0.5z}{z^2-z+0.5} \text{ ici } p = \frac{1}{2} - j/2$$

$$\lim_{z\to p}\left(\frac{z-p}{z}\frac{3z_2+0.5z}{z^2-z+0.5}\right) = \frac{3z^2+0.5z}{z(z-\bar{p})}\bigg|_{z=p} = 1{,}5-2j \quad = x+jy$$

$$w(kh) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(3\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left[3\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

moins !
arg. $-\pi/4$!

---

pôle multiple

$$W(z) = \frac{c_1 z}{z-p} + c_2\frac{z}{(z-p)^2} + \cdots + c_l\frac{z}{(z-p)^l}$$

$$c_{l-i} = \lim_{z\to p}\left(\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dz^i}\left(\frac{(z-p)^l}{z}W(z)\right)\right)$$

4.2 inversion numérique

$$X(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$x(kh) = b_k - \sum_{l=0}^{k-1} x(lh)\, a_{k-l}$$

relation de récurrence.

Exemple:

$\frac{z^3-2z^2-2z}{z^3-4z^2+5z-2}$

$$x_0 = b_0 = 1$$

$$x_1 = b_1 - \sum_{l=0}^{0} x(lh) a_{1-l} = -2 - (1)(-4) = 2$$

$$x_2 = b_2 - \sum_{l=0}^{1} x(lh) a_{2-l} = -2 - x(0)a_2 - x(1)\cdot a_1 = -2 - 1\cdot 5 - 2(-4) = -2 - 5 + 8 = 1$$

$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = X(z)$$

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} = (1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) X(z)$$

ainsi c'est la convolution

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_n\} = \{1, a_1, \ldots, a_n\} * \{x(kh)\}$$

---

et donc

$$\boxed{x(kh) = b_k - \sum_{l=0}^{k-1} x(lh) a_{k-l}}$$

formule obtenue en isolant le dernier terme du résultat de la convolution. En détails:

$$b_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} x(lh) = \sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l} x(lh) + \underline{\underline{x(kh)}}$$

On peut également procéder par division;

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \quad \Big| \quad 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$

le quotient sera la transformée en Z inverse. . . . -