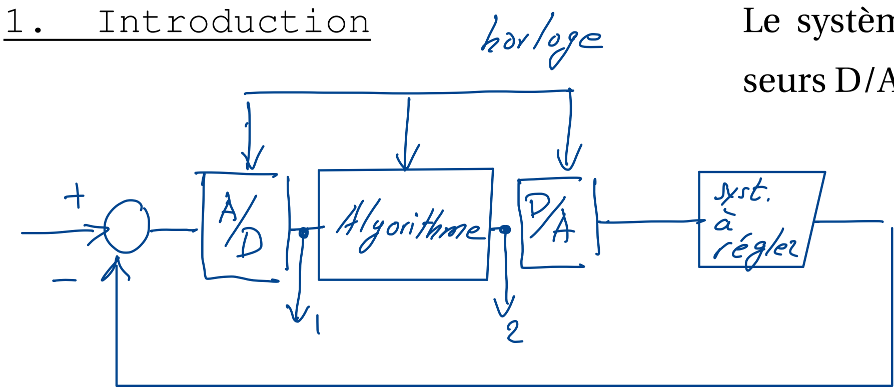
III. Système discret

1. Introduction
2. Système discret
3. Equations aux différences
4. Opérateurs avance et retard

1. Introduction



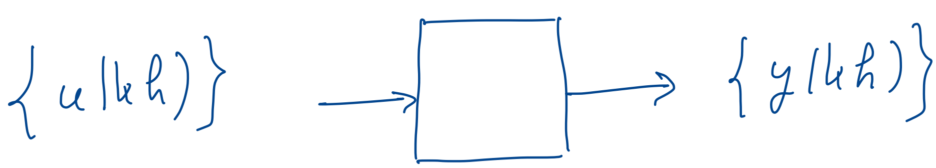
Le système à régler vu par les covertisseurs D/A et A/D est un système discret

$2 \rightarrow 1$ est un système discret (à temps discret)

$1 \rightarrow 2$ est l'algorithme, essentiellement discret

2. Système discret

Définition: Un système discret est une relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie qui n'invoque que ces grandeurs aux instants discrets $t = kh$.



2.1.a Système discret dynamique

Définition: Un système discret est dit dynamique lorsque $y(k_0h)$ dépend non seulement de $u(k_0h)$, mais également des valeurs passées et/ou futurs $u(kh)$, $\forall k \neq k_0$, $\exists k_0$.

2.1.b. Système discret au repos

Définition: Un système dynamique au temps 0 est au repos lorsque $\{y(kh) | k \geq 0\}$ est déterminé de manière unique par $\{u(kh) \,|\, k \geq 0\}$

Cela définit une application

$$\{u(kh) \,|\, k \geq 0\} \xrightarrow{G} \{y(kh) \,|\, k \geq 0\}$$

2.1.c. Système discret dynamique au repos linéaire

$$\{u(kh) \,|\, k \geq 0\} \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow \{y(kh) \,|\, k \geq 0\}$$

Convention séquences nulles pour $k<0$

$$\{u(k)\} - \boxed{G} - \{y(k)\}$$

$k=0$

Supposons deux expériences $\{u_1(kh)\} \xrightarrow{G} \{y_1(kh)\}$ et $\{u_2(kh)\} \xrightarrow{G} \{y_2(kh)\}$

Définition: Un système est dit linéaire si $\forall\ \{u_1(kh)\}$, $\forall \{u_2(kh)\}$, on a

$$G\left(\{u_1(kh) + u_2(kh)\}\right) = \{y_1(kh) + y_2(kh)\}$$

$$G\left(a\{u_i(k)\}\right) = a\{y_i(k)\} \quad i=1,2$$

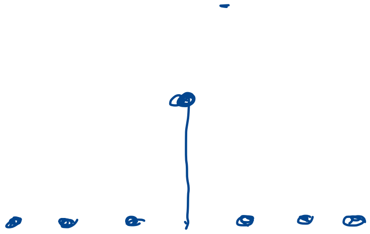
$$a \in \mathbb{R}.$$

2.1.d. Système discret causal

Définition: Un système est dit causal si sa sortie $y(k_0h)$ ne dépend pas des valeurs prises par l'entrée après l'instant $t = k_0 h$ (si $y(k_0h)$ ne dépend pas, dans le cas discret, de $u(kh)$ pour $k \geq k_0$

$\Rightarrow$ le futur n'affecte pas instantanément le présent.

2.1.e. Impulsion unité



$$\Delta(kh) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\{\Delta(kh)\} = \{\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$$

2.1.f. Réponse impulsionnelle

Définition: C'est la réponse du système au repos, à une impulsion unité appliquée à l'instant $l\,h$.

$$\{\Delta(kh-lh)\} \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow \{g(kh, lh)\}$$

2.1.g. Système discret stationnaire

Définition: Lorsque $\forall d$,

$$\{g(kh, lh)\} = \{g(kh+dh, lh+dh)\}$$

alors le système discret est dit stationnaire. Ceci implique que $g(kh, lh)$ ne dépend que de la différence $k-l$

2.1.h. produit de convolution

Un système linéaire, au repos, permet d'exprimer la sortie au moyen de l'entrée et de la réponse impulsionnelle par le produit de convolution. La réponse impulsionnelle caractérise entièrement un système dynamique, au repos, et linéaire.

Définition:

$$\{y(kh)\} = \{u(kh)\} * \{\cancel{g(kh)}\} = \left\{ \sum_{l=0}^{k} u(lh)\, g(kh, lh) \right\}$$

$\{g(kh, lh)\}$

$$\{u(kh)\} \longrightarrow \boxed{\{g(kh, lh)\}} \longrightarrow \{y(kh)\}$$

$$\sum_{l=0}^{k} u(lh)\, g(kh, lh) \triangleq y(kh)$$

Démonstration: Application du principe de superposition et du principe de causalité

Produit de convolution

Soit $\{u(kh)\}$ un signal quelconque. Comment déterminer la sortie correspond~~a~~ente si on connaît la réponse impulsionnelle du système ?

$$\{u(kh)\} \longrightarrow \boxed{\{g(kh)\}} \longrightarrow \{y(kh)\} = ?$$

$$\begin{array}{ll} & u(0)\,\{\Delta(kh)\} \\ & u(h)\,\{\Delta(kh-h)\} \\ & \vdots \\ + & u(lh)\,\{\Delta(kh-lh)\} \\ & \vdots \\ \hline & \{u(kh)\} = \sum_{l=0}^{+\infty} u(lh)\{\Delta(kh-lh)\} \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} & u(0)\,\{g(kh, 0)\} \\ & u(h)\,\{g(kh, h)\} \\ + & u(lh)\,\{g(kh, lh)\} \\ & \vdots \\ \hline & \sum_{l=0}^{\infty} u(lh)\, g(kh, lh) = \{y(kh)\} \end{array}$$

$$\{y(kh)\} = \sum_{l=0}^{\infty} u(lh)\, g(kh, lh)$$

Causalité $\Rightarrow$ impose que la réponse impulsionnelle soit nulle avant l'injection de l'impulsion unité. Autrement dit

$$g(kh, lh) = 0 \quad \forall\, k < l$$

On ajuste ainsi la borne supérieure de la somme

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{k} u(lh)\, g(kh, lh)$$

---

stationnaire

$$g(kh, lh) = g(kh - lh)$$

Définition du produit $*$ (de convolution)

$$\boxed{\{u(kh)\} * \{g(kh)\} = \sum_{l=0}^{k} u(lh)\, g(kh - lh)}$$

Propriétés: Anneau intègre (sans diviseur de zéro.)

commutatif $\quad \{u_1(k)\} * \{u_2(k)\} = \{u_2(k)\} * \{u_1(k)\}$

distributif $\quad \{u_1(k)\} * \left(\{u_2(k)\} + \{u_3(k)\}\right) = \{u_1(k)\} * \{u_2(k)\} + \{u_1(k)\} * \{u_3(k)\}$

associatif $\quad u_1 * (u_2 * u_3) = (u_1 * u_2) * u_3$

élément neutre $\quad \{\Delta(kh)\} = 1$

$$a * b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ et/ou } b = 0$$

$$\boxed{a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \not\Rightarrow a * b = 0}$$

3. Equations aux différences

Définition: Une équation aux différences linéaire à coefficients constants, d'ordre n est une relation linéaire qui lie les valeurs successives de l'entrée aux valeurs successives de la sortie. Avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, on a:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) = b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \cdots + b_m u(k)$$

En retardant de n périodes d'échantillonnage

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k+m-n) + b_1 u(k+m-n-1) + \cdots + b_m u(k-n) \qquad (1)$$

Définition: Le degré relatif d est défini par la différence

$$d = n - m$$

---

le membre de droite de (1) peut se mettre sous la forme

$$b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m)$$

<u>Théorème:</u> causalité $\Leftrightarrow d \geq 0$

<u>Définition:</u> conditions initiales $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$

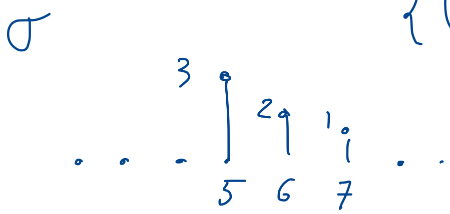
<u>Théorème:</u> Si les conditions initiales $y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)$ sont toutes nulles, et que les entrées passées $u(k-1), u(k-2), \dots$ sont toutes nulles, alors la sortie $\{y(\ell)\}_{\ell \geq k}$ est complètement déterminée de façon récurrente par l'entrée $\{u(\ell)\}_{\ell \geq k}$ de manière unique. Ici le temps 0 est l'instant k.

---

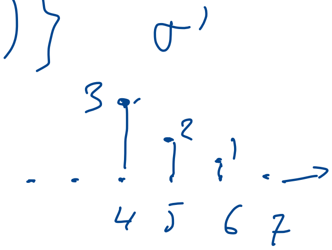
4. opérateur avance et retard

4.1. opérateur avance

$$\{\sigma(kh)\} \longrightarrow \boxed{q} \longrightarrow \{\sigma'(kh)\}$$

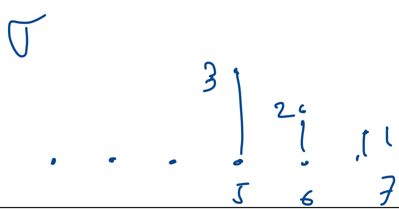


$$\sigma'(kh) = \sigma(kh+h)$$

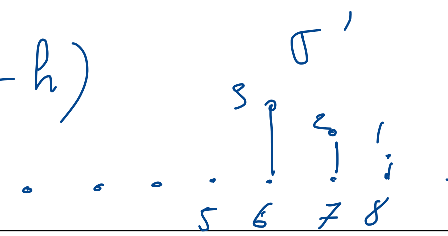


4.2. opérateur retard

$$\{\sigma(kh)\} \longrightarrow \boxed{q^{-1}} \longrightarrow \{\sigma'(kh)\}$$



$$\sigma'(kh) = \sigma(kh-h)$$



---

effet de l'opérateur d'avance

$$\{0, 0, 3, 2, 1, 0\} \xrightarrow{q} \{0, 3, 2, 1, 0, 0\}$$

effet de l'opérateur de retard

$$\{0, 0, 3, 2, 1, 0\} \xrightarrow{q^{-1}} \{0, 0, 0, 3, 2, 1\}$$

4.3. Effet sur l'équation aux différences

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) = b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \cdots + b_m u(k)$$

$$q^n y(k) + a_1 q^{n-1} y(k) + \cdots + a_n y(k) = q^m b_0 u(k) + q^{m-1} b_1 u(k) + \cdots + b_m u(k)$$

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \cdots + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Isomorphisme

On peut introduire l'isomorphisme qui associe une suite d'échantillons

$$\{\sigma(k) | k \geq 0\}$$

la série formelle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sigma(k) \, q^{+\infty - k} \quad \text{si fini} \quad \sum_{\ell=0}^{N} \sigma(k) \, q^{N-k}$$

---

opérateur d'avance

$$\{0, 0, 3, 2, 1, 0\} \leftrightarrow \quad 3q^2 + 2q + 1$$

de telle sorte que l'opérateur d'avance q a pour effet

$$q\,(3q^2 + 2q + 1) = 3q^3 + 2q^2 + q$$

$$\{0, 3, 2, 1, 0, 0\}$$

---

opérateur de retard

$$\{0, 0, 3, 2, 1, 0\} \leftrightarrow \quad 3q^2 + 2q + 1$$

de telle sorte que l'opérateur de retard q^{-1} a pour effet

$$q^{-1}\,(3q^2 + 2q + 1) = 3q + 2 + q^{-1}$$

$$\leftrightarrow \{0, 0, 0, 3, 2, 1\}$$

En continu	En discret
$\rightarrow \boxed{\int} \rightarrow$	$\rightarrow \boxed{q^{-1}} \rightarrow$