II. Echantillonnage et reconstruction

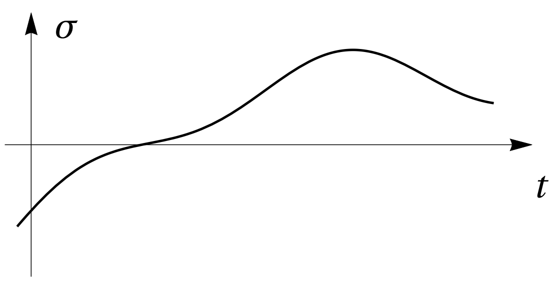
1. Signaux
2. Echantillonnage et reconstruction
3. Filtre de garde
4. Expérience, manipulation

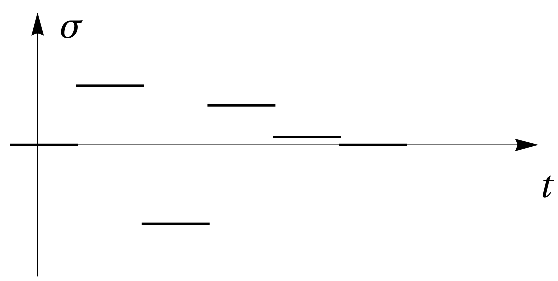
---

1. Signaux

1.1 Signal analogique (ou à temps continu)

C'est une fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





1.2 Signal discret (ou à temps discret)

Soit $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ et $\{t_k | k \in \mathbb{Z}\}$ un sous-ensemble de nombres réels.

Définition: Un signal discret est une fonction

$$\sigma : \{t_k | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Illustration 1

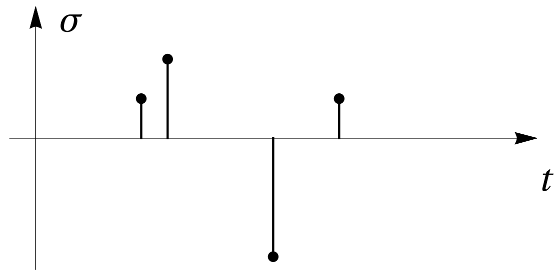
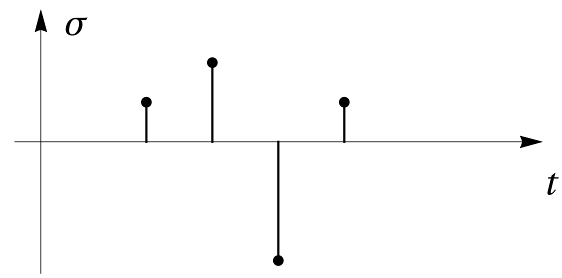


Illustration 2, lorsque les t_k sont équiséparés par $h = t_{k+1} - t_k$



1.3 Signal numérique ou digital

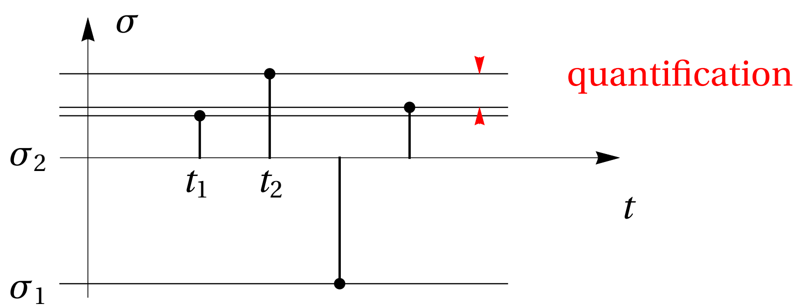
L'ensemble des valeurs possibles est un ensemble discrets finis:

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\}$$

Définition: Un signal numérique est une fonction

$$\sigma : \{t_k | k \in \mathbb{Z}\} \to \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\}$$

Illustration



Nomenclature

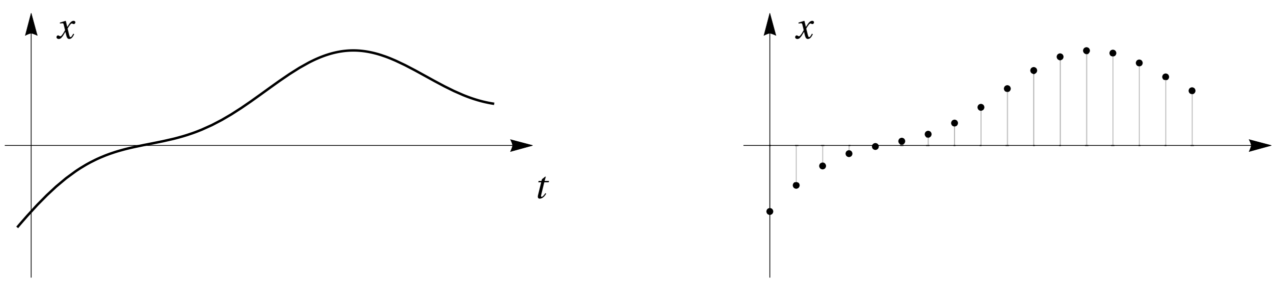
- instants d'échantillonnage: $\{t_k | k \in \mathbb{Z}\}$
- uniformément échantillonné: $t_{k+1} - t_k = h,\ k \in \mathbb{Z}$
- fréquence d'échantillonnage: $f_e = \frac{1}{h}$

- pulsation d'échantillonnage: $\omega_e = \frac{2\pi}{h} = 2\pi f_e$
- signal discret: $\{\sigma(t_k)\}$, $\{\sigma(kh)\}$ ou simplement $\{\sigma(k)\}$.
- dorénavant on écrira x à la place de σ.

2. Echantillonnage et reconstruction

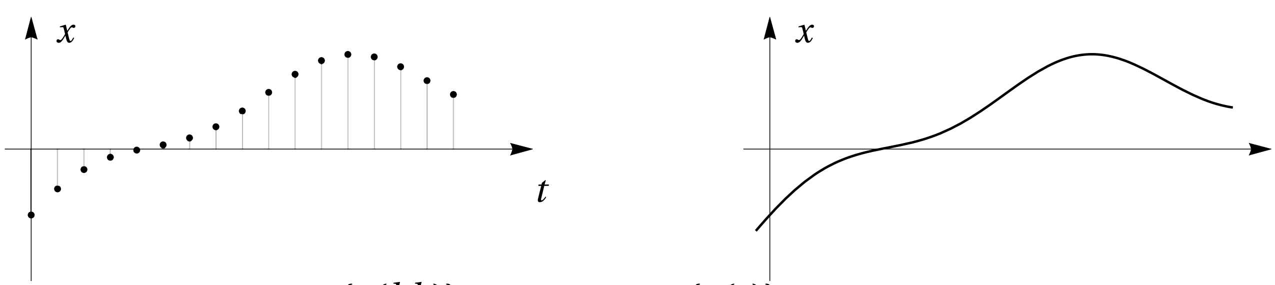
2.1 Echantillonnage

Définition: C'est l'opération d'extraire du signal analogique continu $\{x(t)\}$, une version discrète numérique $\{x(kh)\}$. On considére que l'échantillonnage est uniforme lorsque $t_k = kh$.



$$\{x(t)\} \longrightarrow_{\text{échantillonnage}} \{x(kh)\}$$

2.2 Reconstruction



$$\{x(kh)\} \longrightarrow_{\text{reconstruction}} \{x(t)\}$$

La question:

Sous quelles conditions cette reconstruction est possible sans erreur?

2.3 Théorème de l'échantillonnage

Théorème: (Claude Shannon)

A. Un signal analogique $\{x(t)\}$ dont la transformée de Fourier est nulle $\forall\omega \neq [-\omega_0; +\omega_0]$ est parfaitement défini par ses échantillons $\{x(kh)\}$, si, et seulement si, la pulsation d'échantillonnage ω_e est telle que

$$\omega_e > 2\omega_0$$

B. La reconstruction de $x(t)$ est donnée par la formule

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) \frac{\sin\left(\frac{\omega_e}{2}(t-kh)\right)}{\frac{\omega_e}{2}(t-kh)}}$$

Illustration de l'hypothèse

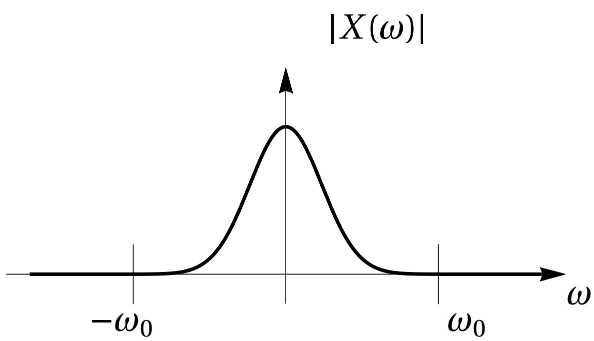
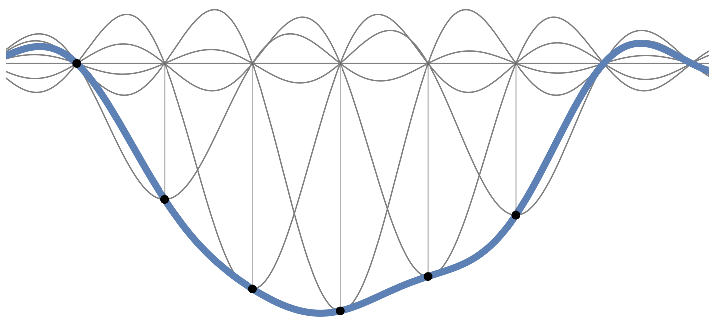
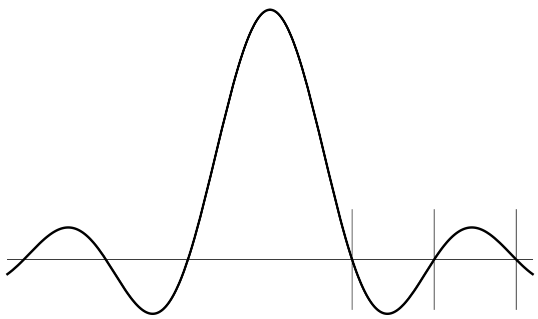


Illustration de la formule de reconstruction





$$\frac{\sin\left(\frac{\omega_e}{2}t\right)}{\frac{\omega_e}{2}t} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}t\right)}{\frac{\pi}{h}t} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t}{h}\right)$$

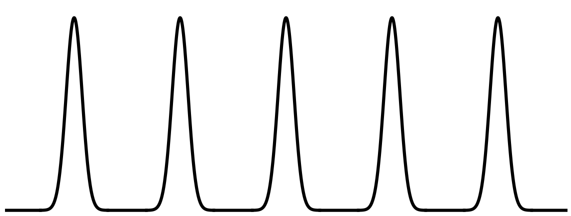
La formule de reconstruction s'écrit également sous les formes

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kh)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}t - \pi k\right)}{\frac{\pi}{h}t - \pi k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{h}t - k\pi\right)$$

Esquisse de la démonstration

a). On construit le périodisé en fréquence (pulsation) divisé par h



$$X_e(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + n\omega_e)$$

b). Comme $X_e(\omega)$ est un signal périodique en ω_e, il admet une série de Fourier complexe

$$X_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{j\,kh\omega}$$

A partir de la formule classique des coefficients, lorsque le signal est temporel

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi k}{T} t} \, dt$$

s'adapte au cas où le signal est fréquentiel à l'aide des correspondances $T \Rightarrow \omega_e$, $dt \Rightarrow d\omega$, $\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi}{2\pi} h = h$

$$c_k = \frac{1}{\omega_e} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} X_e(\omega) e^{j\omega kh} \, d\omega$$

---

c). On montre que les coefficients c_k sont égaux aux échantillons $x(kh)$.

d). Ainsi, si on connait les c_k, on peut fabriquer $X_e(\omega)$ par la formule de reconstruction de la série de Fourier

---

e). Si $X_e(\omega)$ est connu, signal fréquentiel périodique, on fabrique $X(\omega)$ par restriction à l'intervalle $\left[-\frac{\omega_e}{2}; \frac{\omega_e}{2}\right]$, signal fréquentiel non périodique.

f). On trouve $x(t)$ par transformation de Fourier inverse de $X(\omega)$. Ceci conduit à la formule de reconstruction par intégration.

---

3. Filtre de garde

A cause du théorème de l'échantillonnage, il faut limiter le contenu fréquentiel dans un intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. On introduit un filtre, dit de garde, pour atteindre cet objectif. La pulsation de coupure ω_c est choisie plus petite que $\frac{\omega_e}{2}$ et suffisament grande pour garantir les propriétés du système en boucle fermée:

- garantir une réponse indicielle suffisament rapide
- rejeter les perturbations dont les fréquences sont comprises entre ω_c et ω_e,

Détails de la démonstration du théorème d'échantillonnage

a). On construit le périodisé en fréquence de $X_e(\omega)$

$$X_e(\omega) = \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + n\omega_e)$$

b). Comme $X_e(\omega)$ est un signal périodique (en ω), il admet la série de Fourier

$$X_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-jkh\omega} \qquad \text{avec} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\, dt$$

ici

$$T = \omega_e$$
$$dt = d\omega$$
$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi}{2\pi} h = h$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{\omega_e} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} X_e(\omega) e^{jkh\omega} d\omega}$$

c). Du développement précédent on constate que

$$c_k = \frac{1}{\omega_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} X(\omega) e^{jkh\omega}\, d\omega \qquad \text{car} \qquad X(\omega) \text{ est nul } \forall |\omega| > \omega_0$$

Comme $\omega_e = \frac{2\pi}{h}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{jkh\omega}\, d\omega$$

et on trouve la transformée de Fourier inverse évaluée en kh et donc $c_k = x(kh)$.

d).

$$X_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) e^{-jkh\omega}$$

e) + f)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} X_e(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) e^{-jkh\omega} \right) e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} e^{j\omega t - jkh\omega} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) \frac{\sin\left(\frac{\omega_e}{2}(t-kh)\right)}{\frac{\omega_e}{2}(t-kh)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kh) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_e}{2}(t-kh)\right) \end{aligned}$$