II. Echantillonnage et reconstruction

1. Signaux
2. Echantillonnage et reconstruction
3. Filtre de garde
4. Expérience, manipulation

1. Signaux

1.1 Signal analogique (ou à temps continu)

1.2 Signal discret (ou à temps discret)

Soit $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ et $\{t_k | k \in \mathbb{Z}\}$ un sous-ensemble de nombres réels.

Définition: Un signal discret est une fonction

Illustration 1

Illustration 2, lorsque les t_k sont équiséparés par $h = t_{k+1} - t_k$

1.3 Signal numérique ou digital

L'ensemble des valeurs possibles est un ensemble discrets finis:

Définition: Un signal numérique est une fonction

Illustration

Nomenclature

- instants d'échantillonnage:
- uniformément échantillonné:
- fréquence d'échantillonnage:

- pulsation d'échantillonnage:
- signal discret:
- dorénavant on écrira x à la place de σ.

---

2. Echantillonnage et reconstruction

2.1 Echantillonnage

Définition: C'est l'opération d'extraire du signal analogique continu $\{x(t)\}$, une version discrète numérique $\{x(kh)\}$. On considére que l'échantillonnage est uniforme lorsque $t_k = kh$.

La question:

Sous quelles conditions cette reconstruction est possible sans erreur?

2.3 Théorème de l’échantillonnage

Théorème: (Claude Shannon)

A. Un signal analogique $\{x(t)\}$ dont la transformée de Fourier est nulle $\forall \omega \neq [-\omega_0; +\omega_0]$ est parfaitement défini par ses échantillons $\{x(kh)\}$, si, et seulement si, la pulsation d’échantillonnage ω_e est telle que

B. La reconstruction de $x(t)$ est donnée par la formule

Illustration de l’hypothèse

Illustration de la formule de reconstruction

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega_e}{2}\,t\right)}{\frac{\omega_e}{2}\,t} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}\,t\right)}{\frac{\pi}{h}\,t} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\,t}{h}\right)$$

La formule de reconstruction s'écrit également sous les formes

Esquisse de la démonstration

a). On construit le périodisé en fréquence (pulsation) divisé par h

$$X_e(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + n\omega_e)$$

b). Comme $X_e(\omega)$ est un signal périodique en ω_e, il admet une série de Fourier complexe

---

Avec la formule classique

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi k}{T}}\, dt$$

Dans notre cas, $T \Rightarrow \omega_e$, $dt \Rightarrow d\omega$, $\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi}{2\pi} h = h$

---

c). On montre que les coefficients c_k sont égaux aux échantillons $x(kh)$.

d). Ainsi, si on connait les c_k, on peut fabriquer $X_e(\omega)$ par la formule de reconstruction de la série de Fourier

---

e). Si $X_e(\omega)$ est connu, on fabrique $X(\omega)$ par restriction à l'intervalle $\left[-\frac{\omega_e}{2}; \frac{\omega_e}{2}\right]$.

f). On trouve $x(t)$ par transformation de Fourier inverse de $X(\omega)$. Ceci conduit à la formule de reconstruction par intégration.

---

3. Filtre de garde

A cause du théorème de l'échantillonnage, il faut limiter le contenu fréquentiel dans un intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. On introduit un filtre, dit de garde, pour atteindre cet objectif. La pulsation de coupure ω_c est choisie plus petite que $\frac{\omega_e}{2}$ et suffisament grande pour garantir les propriétés du système en boucle fermée:

- garantir une réponse indicielle suffisament rapide
- rejeter les perturbations dont les fréquences sont comprises entre ω_c et ω_e,

Détails de la démonstration du théorème d'échantillonnage

a). On construit le périodisé en fréquence de $X_e(\omega)$

$$X_e(\omega) =$$

b). Comme $X_e(\omega)$ est un signal périodique (en ω), il admet la série de Fourier ici

$$T = \omega_e$$

$$dt = d\omega$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi}{2\pi} h = h$$

---

c). Du développement précédent on constate que

Comme $\omega_e = \frac{2\pi}{h}$

et on trouve la transformée de Fourier inverse évaluée en kh et donc $c_k = x(kh)$.

---

d).

---

e) + f)