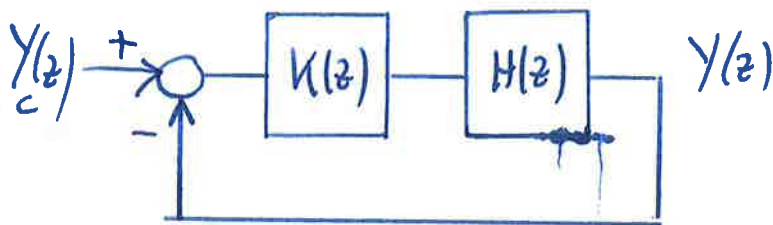


X Régulateur RST

(1)

- 1) Régulateur classique (1 d° de liberté)
- 2) Régulateur RST (2 d° de liberté)
- 3) Factorisation des zéros
- 4) Modèle à poursuivre
- 5) Polynôme observateur
- 6) Equation de Diophante
- 7) Ecriture matricielle
matrice de Sylvester

1) Régulateur classique



$$K(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Boucles fermées
Avertissement

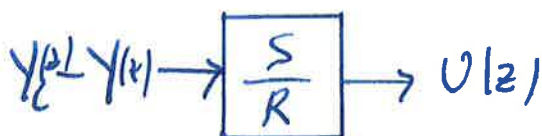
$$\frac{KH}{1+KH} = \frac{BS}{AR+BS}$$

Régulation

$$\frac{H}{1+KH} = \frac{B/A}{1 + \frac{S}{R} \frac{B}{A}} = \frac{BR}{AR+BS}$$

2. Régulateur RST

polynôme T : d° de liberté supplémentaire



En asservissement classique

(2)

$$\frac{Y_c(z)}{Y(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{BS}{AR+BS} \quad U = \frac{S}{R} (Y_c - Y)$$

$$U = \frac{S}{R} Y_c - \frac{S}{R} Y$$

En RST: on modifie cette relation :

$$\frac{T}{R} Y_c - \frac{S}{R} Y = U$$

$$R \cdot U = T Y_c - S Y$$

et comme $Y = \frac{B}{A} U$, on a $R \frac{A}{B} Y = T Y_c - S Y$

$$\frac{Y}{Y_c} = \frac{B \cdot T}{AR + BS}$$

3.) Factorisation des zéros et simplification de certains de ceux-ci.

On constate que les zéros du système à régler demeurent intacts lors d'une simplification entre B et $AR + BS$.

On peut simplifier certains de ces zéros

1°) à condition qu'ils soient bien amortis.

2°) ils ne doivent ^{absolument} pas être à l'extérieur du cercle unité.

Factorisation: $B(z) = B^+(z)B^-(z)$

$B^+(z)$ est un facteur de $AR+BS$ (tout zéro de $B^+(z)$ est un zéro de $AR+BS$).

B^- n'a aucun zéro en commun avec $AR+BS$

⚠ l'exposant + n'indique aucune relation de signe, uniquement qu'ils sont communs.

4) Modèle à poursuivre

Idee: On va forcer la fonction de transfert en boucle fermée à valoir celle d'un modèle imposé, le modèle à poursuivre.

$$\frac{Y}{Y_c} = \frac{B \cdot T}{AR+BS} \triangleq \frac{B_m}{A_m}$$

Définition

$\frac{B_m}{A_m}$ est le modèle à poursuivre

De manière générale, $\frac{B_m}{A_m}$ est un modèle d'ordre

inférieur à $\frac{BT}{AR+BS}$.

$$\left(\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_m}{A_m} \frac{A_0}{A_0} \right)$$

Ainsi, pour avoir l'égalité entre numérateurs et dénominateurs il faut introduire un polynôme supplémentaire $A_0(z)$.

$$BT = B_m A_0 \text{ et } AR+BS = A_m A_0$$

5) Polynôme observateur

$$BT = A_0 B_m \rightarrow \text{définit } T$$

$$AR+BS = A_0 A_m \rightarrow \text{est une équation de Diophante}$$

6) Equation de Diophante

(4)

L'équation $AR + BS = A_0 A_m$
est à résoudre lorsqu'il n'y a pas de
simplification de zéros avec les pôles en BF (les
zéros de $AR + BS$).

Simplification des zéros:

Factorisation de $B_m(z)$

$$B_m(z) = B^-(z) B_m'(z)$$

(définition de B_m')

Justification

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B^+ B^{-T}}{AR + BS} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\Delta)$$

Comme A et B n'ont pas de facteur commun,
 A ne possède pas le facteur B^+ .

Ainsi, pour pouvoir simplifier B^+ , il faut que B^+
soit facteur de R .

$$\frac{B^+ B^{-T}}{AB^+ R' + B^+ B^- S} = \frac{B^{-T}}{AR' + B^- S} \quad (*)$$

Définition de R' factorisation de $R = B^+ R'$

$$(\Delta) \rightarrow A_m B^+ B^{-T} = B_m (AR + BS)$$

Etant donné qu'aucun zéro de B^- n'est zéro de
 $AR + BS$, B^- doit être un facteur de B_m

$$B_m = B^- B_m'$$

CQFD

L'équation de Diophante

(5)

$$AR + BS = A_0 A_m$$

avec simplification de zéro

$$AR' + B'S = A_0 A_m$$

avec simplification de zéro(s).

Théorie par l'intermédiaire d'un exemple de la résolution de l'équ. de

Diophante.

Exemple théorique

choix du polynôme observateur

$$A = z^2 + a_1 z + a_2$$

$$A_0 = z$$

$$B = b_0 z + b_1$$

$$S = s_0 z + s_1$$

$$A_0 A_m = z^3 + a_{m1} z^2 + a_{m2} z$$

$$R = z + r_1$$

$$A_m = z^2 + a_{m1} z + a_{m2}$$

$$(z^2 + a_1 z + a_2)(z + r_1) + (b_0 z + b_1)(s_0 z + s_1)$$

$$\begin{aligned} & z^3 + a_1 z^2 + a_2 z \\ & + r_1 z^2 + a_1 r_1 z + a_2 r_1 \\ & + b_0 s_0 z^2 + b_1 s_0 z \\ & + b_0 s_1 z + b_1 s_1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} & b_0 s_0 z^2 + b_1 s_0 z \\ & + b_0 s_1 z + b_1 s_1 \end{aligned} \right)$$

$$[1 \quad r_1 \quad s_0 \quad s_1] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{bmatrix} = [1 \quad a_{m1} \quad a_{m2} \quad 0]$$

écriture
matricielle

$$z^3 \quad z^2 \quad z \quad 1$$

formulation plus compacte: (1 ordre de moins) on supprime la constante 1. (6)

$$r_1 z^2 + a_1 r_1 z + a_2 r_1 = (a_{m1} - a_1) z^2 + (a_{m2} - a_2) z$$

$$b_0 s_0 z^2 + b_1 s_0 z + b_0 s_1 z + b_1 s_1$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & s_0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m1} - a_1 & a_{m2} - a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

En notation transposée:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m1} - a_1 \\ a_{m2} - a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

par inversion
matricielle
on trouve
 r_1, s_0, s_1

Notation générale:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{\delta A} & & & & \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta R} & \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta S+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{\delta B} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{b_{\delta B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{\delta R} \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{\delta S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{\delta A} - a_{\delta A} \\ c_{\delta A+1} \\ \vdots \\ c_{\delta R + \delta S + 1} \end{bmatrix}$$

Remarque: si S_0 et R_0 sont solutions,

alors

Q paramétrisation

$$S' = S_0 - QA$$

$$R = R_0 + QAB$$

sont également
solutions

$$AR + BS = A(R_0 + QB) + B(S_0 - QA) = AR_0 + BS_0 + AQB - BQA$$

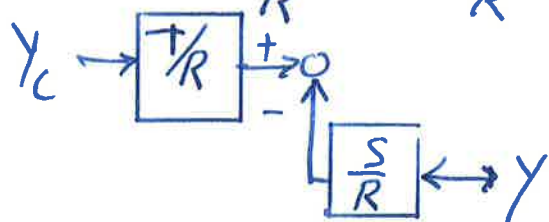
Théorème Il existe un régulateur tel que $\delta R \geq \delta S$
et $\delta R \geq \delta T$ si

1) $\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$

2) $\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1$ (Démonstration $\Rightarrow$ livre)

Remarque importante concernant l'implémentation

ne pas implémenter les fonctions de transfert de manière isolée $\frac{T}{R}$ et $\frac{S}{R}$



car ils pourraient être instables
(par exemple lors de la
présence d'un intégrateur)

mais il faut implémenter ~~aux~~ l'équation aux différences

$$u(z) = \frac{T}{R} Y_c - \frac{S}{R} Y$$

$$U(z) R(z) = T(z) Y_c(z) - S(z) Y(z)$$

⚠ utiliser une seule fois $R(z)$!