

Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques

Formulaire

Linéarité

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) &= \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\}) \\ \mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) &= a\mathcal{Z}(w(kh)) \quad a \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Décalages temporels

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(w(kh - dh)) &= z^{-d}W(z) \quad d \in \mathbb{N} \\ \mathcal{Z}(w(kh + dh)) &= z^dW(z) - \sum_{i=0}^{d-1} z^{d-i} \quad d \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Dérivation complexe

$$\mathcal{Z}(kh w(kh)) = -hz \frac{dW}{dz}(z)$$

Changement d'échelle complexe

$$\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \quad a \in \mathbb{C} \ a \neq 0$$

Valeurs initiale et finale

$$\begin{aligned}w(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} W(z) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W(z) \quad |z_i| < 1\end{aligned}$$

Produit de convolution

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^k u(lh)g(kh-lh)\right) = G(z)U(z)$$

Accumulation

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^k w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$$

Différence

$$\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh-h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$$

Table 1: Tableau de la grammaire de la transformée en $\mathcal{Z}$

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}} \left(\frac{z}{z-e^{-ah}} \right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2 e^{-akh}$	$\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)!}}{(l-1)!} \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}} \left(\frac{z}{z-e^{-ah}} \right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh} \sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah} \sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$

Table 2: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

14	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akh} \cos(\omega kh)$	$\frac{z(z - e^{-ah} \cos(\omega h))}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h)z + e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k(k-1) a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!} \left(\prod_{i=0}^{l-2} (k-i) \right) (a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

Table 3: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

$W_N^{nk} = e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$	
$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) W_N^{kn}$	$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk}$
$y(k) = x(k)g(k)$	$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)G(n-m)$
$y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)g(k-l)$	$Y(n) = X(n)G(n)$ TFD avec $N_x + N_g - 1$ échantillons
$x(k - k_0)$ cyclique	$W_N^{-nk_0} X(n)$

Table 4: Table transformée de Fourier discrète