

25 mars 2024

Expérience : 6. Fonction de transfert harmonique - réponse harmonique

1 Matériel

La partie matérielle est identique à celle de la manipulation 5.

2 Objectif

On va illustrer, dans la partie pratique, quelques éléments de l'interprétation de la fonction de transfert harmonique en boucle fermée. Plusieurs expériences spécifiques seront effectuées pour déterminer des points clés sur la courbe du transfert harmonique. Il s'agit des points liés aux phénomènes suivants :

- Déterminer la valeur de la fréquence d'un signal sinusoïdal pur (ou signal harmonique) pour lequel le signal de sortie est inversé (c.-à-d. changement de signe à chaque échantillon par rapport à la moyenne). Ceci correspond à une phase de $-\pi$.
- Déterminer la pulsation de résonance et l'amplitude à la résonance, si une résonance est présente.
- Obtenir la valeur de la phase lorsque l'amplitude de sortie est identique à celle de l'entrée pour une fréquence du signal d'entrée au delà de la fréquence de résonance.
- Mettre en évidence les particularités de la réponse harmonique lors de la présence d'un système échantillonné.

Tous ces relevés se feront expérimentalement à l'aide de l'oscilloscope.

Un autre objectif de cette manipulation est de discuter la différence entre la boucle fermée purement analogique obtenue lorsque le système à régler est bouclé avec un régulateur proportionnel K , avec la fonction de transfert en boucle fermée obtenue lors de la manipulation 5. La différence provient de l'échantillonneur bloqueur. On illustrera aussi l'interprétation de la fonction de transfert $H'(w)$ introduit dans le cours Leçon 6 sous la dénomination $G'(w)$, ainsi que de l'équivalence approximative de l'échantillonneur bloqueur par un retard d'une demi-période (à la fin de cette leçon).

3 Partie théorique

3.1 Rappel des résultats théoriques obtenus lors de la manipulation 5

Fonction de transfert analogique $G(s)$ donnée par

$$G(s) = \frac{18}{s(s+6)}$$

Fonction de transfert $H(z) = \mathcal{Z} [\mathcal{L}^{-1}(G(s)/s)]$, fonction de transfert discrète représentant le système à régler perçu par le régulateur

$$H(z) = \frac{0.13894z + 0.1321}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

Fonction de transfert discrète, en asservissement, en boucle fermée, lors de l'utilisation d'un régulateur proportionnel $K = 2$

$$H_{bf} = \frac{KH(z)}{1 + KH(z)} = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321}$$

3.2 Fonction de transfert analogique en boucle fermée lors de rétroaction purement analogique

A des fins de comparaison, on introduit la fonction de transfert en boucle fermée qui aurait été obtenue si l'asservissement était fait de manière analogique en utilisant le même régulateur proportionnel $K = 2$

$$G_{bf} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{2 \frac{18}{s(s+6)}}{1 + 2 \frac{18}{s(s+6)}} = \frac{36}{s^2 + 6s + 36}$$

3.3 Fonction de transfert analogique en boucle fermée avec régulateur numérique

Il s'agit de la fonction de transfert obtenue en prenant compte de l'élément de conversion digital analogique par maintien d'ordre zéro. On a vu que celui-ci pouvait grosso modo être approximé par un retard d'une demi période d'échantillonnage qui est la conséquence de la modulation provoquée par la cascade de l'échantillonneur à impulsions et du maintien d'ordre zéro. Ainsi le régulateur analogique équivalent au régulateur proportionnel est

$$K_1(s) = Ke^{-sh/2}$$

Cette fonction de transfert est irrationnelle. Pour la rendre rationnelle on utilise l'approximation bilinéaire de Tustin (obtenue en écrivant $e^{-sh/2} = (e^{-sh/4}/e^{sh/4})$ et en développant en série de Taylor numérateur et dénominateur au premier ordre)

$$K_1 = K \frac{1 - s\frac{h}{4}}{1 + s\frac{h}{4}}$$

ce qui donne avec la période d'échantillonnage $h = 1/6 = 0.166666[s]$ et avec $K = 2$

$$K_1 = K \frac{24 - s}{24 + s} = \frac{48 - 2s}{s + 24}$$

En boucle fermée :

$$\begin{aligned} G_{bf,a} &= \frac{K_1 G}{1 + K_1 G} = \frac{\frac{48-2s}{s+24} \frac{18}{s(s+6)}}{1 + \frac{48-2s}{s+24} \frac{18}{s(s+6)}} = \frac{18(48-2s)}{s(s+24)(s+6) + 18(48-2s)} \\ &= \frac{864 - 36s}{s^3 + 30s^2 + 108s + 864} \end{aligned}$$

REMARQUE : On constate la présence d'un zéro dans le demi-plan droit du plan complexe. De tels systèmes sont appelés des systèmes à non minimum de phase. La présence de ce zéro est ainsi dû au phénomène de commande numérique (retard d'une demi-période d'échantillonnage) par rapport au gain proportionnel sans retard.

3.4 Fonction de transfert analogique approximante $H'_{\text{bf}}(w)$

Il s'agit de calculer $H'_{\text{bf}}(w)$, c.-à-d. la fonction de transfert en introduisant le changement de variable

$$w = \frac{2z - 1}{hz + 1}$$

dont la réciproque est la transformation

$$z = \frac{1 + \frac{wh}{2}}{1 - \frac{wh}{2}} = \frac{2 + wh}{2 - wh} \quad (1)$$

ATTENTION : Il ne faut pas confondre la variable $w \in \mathbb{C}$ avec la pulsation $\omega \in \mathbb{R}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} H'_{\text{bf}}(w) &= \frac{0.3679 \frac{2+wh}{2-wh} + 0.2642}{\left(\frac{2+wh}{2-wh}\right)^2 - \frac{2+wh}{2-wh} + 0.6321} \\ &= \frac{0.3679(2+wh)(2-wh) + 0.2642(2-wh)^2}{(2+wh)^2 - (2+wh)(2-wh) + 0.6321(2-wh)^2} \\ &= \frac{(0.2642 - 0.3679)w^2h^2 - 4 \cdot 0.2642wh + 4(0.2642 + 0.3679)}{(2 + 0.6321)w^2h^2 + 4(1 - 0.6321)wh + 4 \cdot 0.6321} \\ &= \frac{\frac{-0.1037}{2.6321}w^2 - \frac{1.0568}{2.6321h}w + \frac{2.5284}{2.6321h^2}}{w^2 + \frac{1.4716}{2.6321h}w + \frac{2.5284}{2.6321h^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne avec $h = 1/6$

$$H'_{\text{bf}}(w) = \frac{-0.039398 w^2 - 2.409027 w + 34.58166}{w^2 + 3.35458 w + 34.58166}$$

Remarque : Cette fraction rationnelle est calculée par Sysquake en utilisant les commandes

```
numd = [0.3679,0.2642];
dend = [1,-1,0.6321];
(numw,denw) = d2cm(numd,dend,1/6)
```

et on obtient

```
numw =
    -0.039398199156567    -2.409027012651494    34.581664830363592
denw =
    1.000000000000000    3.354583792409102    34.581664830363592
```

En ce qui concerne Matlab, on peut le faire en une ligne

```
d2c(tf([0.3679,0.2642],[1,-1,0.6321],1/6),'Tustin',1/6)
```

ce qui donne

```
ans =

    -0.0394 s^2 - 2.409 s + 34.58
-----
    s^2 + 3.355 s + 34.58
```

Continuous-time transfer function.

Attention à bien interpréter la variable s . A cause de la distortion de l'échelle de la pulsation ω en ν introduite par la transformation bilinéaire (de Tustin), équation (1), la variable s est en fait la variable w .

3.5 Diagrammes de Bode

On va représenter

1. $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$
2. $H'_{\text{bf}}(j\nu)$
3. $G_{\text{bf}}(j\omega)$
4. $G_{\text{bf},a}(j\omega)$

3.5.1 $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ par rapport à $G_{\text{bf}}(j\omega)$

La figure 1 représente le module à gauche et la phase à droite. On constate que la résonance est sous-estimée avec $G_{\text{bf}}(j\omega)$ et que la phase ne devient jamais plus négatives que $-\pi$. Les deux phénomènes sont imputables au fait que le retard induit par le maintien d'ordre zéro n'est pas pris en compte lors du calcul de $G_{\text{bf}}(j\omega)$. On ne peut donc pas traiter le système uniquement avec les outils analogiques.

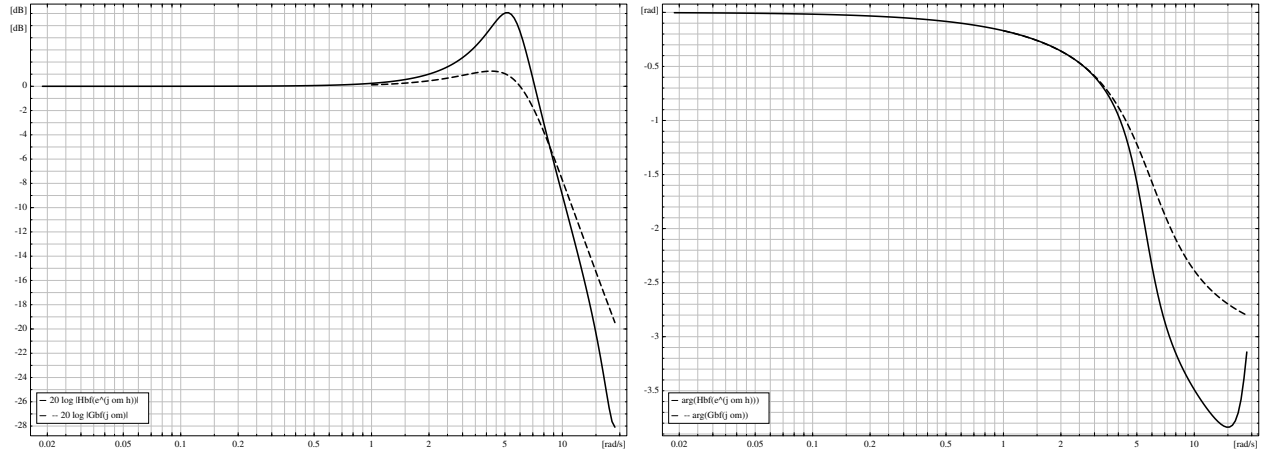


FIGURE 1 – Graphique du module en dB et de la phase. La pulsation ω est représentée en échelle logarithmique. La comparaison est entre la fonction de transfert harmonique discrète en boucle fermée $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ et la fonction de transfert qui aurait été obtenue en fermant la boucle avec un régulateur proportionnel analogique, sans tenir compte de la discrétisation. Cette fonction de transfert harmonique est $G_{\text{bf}}(j\omega)$. .

Remarquer aussi que le module de H_{bf} chute très rapidement autour de la fréquence de Nyquist, dont la pulsation est $\omega_N = \frac{\pi}{h} = 6\pi = 18.85$ [rad/s], ce qui correspond à $f_N = 3$ [Hz]. La période d'échantillonnage pour la partie pratique est mesurée comme $h = 2/13 = 0.154$ [s] et cela donne $\omega_N = 20.42$ [rad/s] et ainsi $f_N = 3.25$ [Hz] (cf. partie pratique).

La phase à la résonance est approximativement $\frac{\pi}{4}$ et que la phase change rapidement autour de la résonance, bien plus que le module ne change.

3.5.2 $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ par rapport à $H'_{\text{bf}}(j\nu)$

La figure 2 représente le module (graphique de gauche) et la phase (graphique de droite). La valeur de la résonance et l'approximation autour de celle-ci est bien estimée par H'_{bf} , principalement par le fait que la pulsation de résonance est assez éloignée de la pulsation de Nyquist.

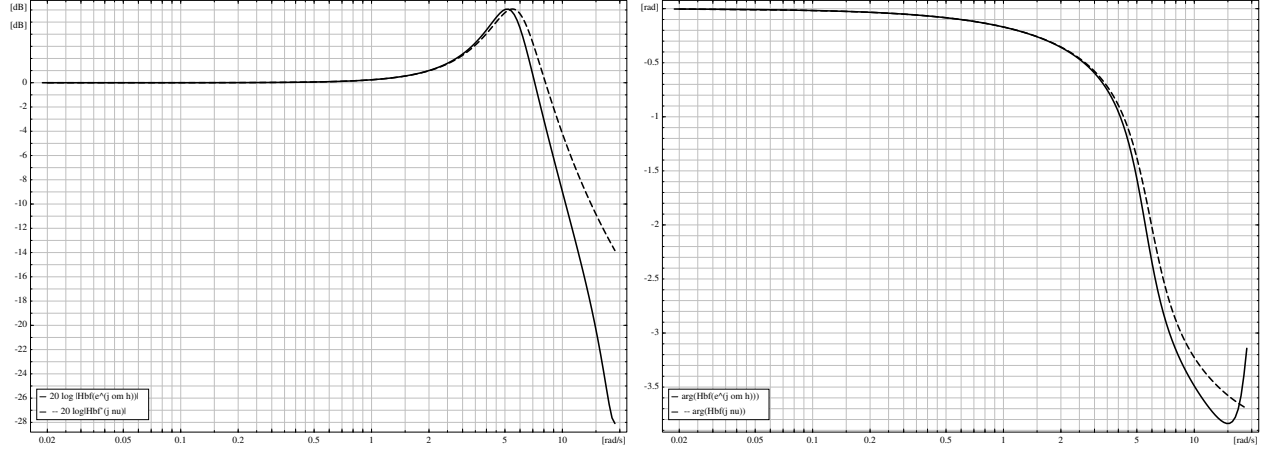


FIGURE 2 – Graphique du module en dB et de la phase. La pulsation ω est représentée en échelle logarithmique. La comparaison est entre la fonction de transfert harmonique discrète en boucle fermée $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ et la fonction de transfert harmonique analogique approximante $H'(j\nu)$, obtenue avec la transformée bilinéaire de Tustin. La distortion de l'échelle, passage de ω vers ν est visible. La résonance est bien prédite car $\nu \approx \omega$ autour de celle-ci. La phase devient plus négative que $-\pi$ ce qui est une bonne chose.

On observe une distortion du module lorsque la pulsation s'approche de celle de Nyquist. Ceci est dû à l'échelle ν par rapport à l'échelle ω et la formule de l'arctangente fait correspondre l'une à l'autre. Le graphique surperpose ν et ω sans tenir compte de cette distortion. La phase est bien mieux prédite que pour $G_{\text{bf,a}}(j\omega)$ et dépasse la valeur de π .

3.5.3 $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ par rapport à $G_{\text{bf,a}}(j\omega)$

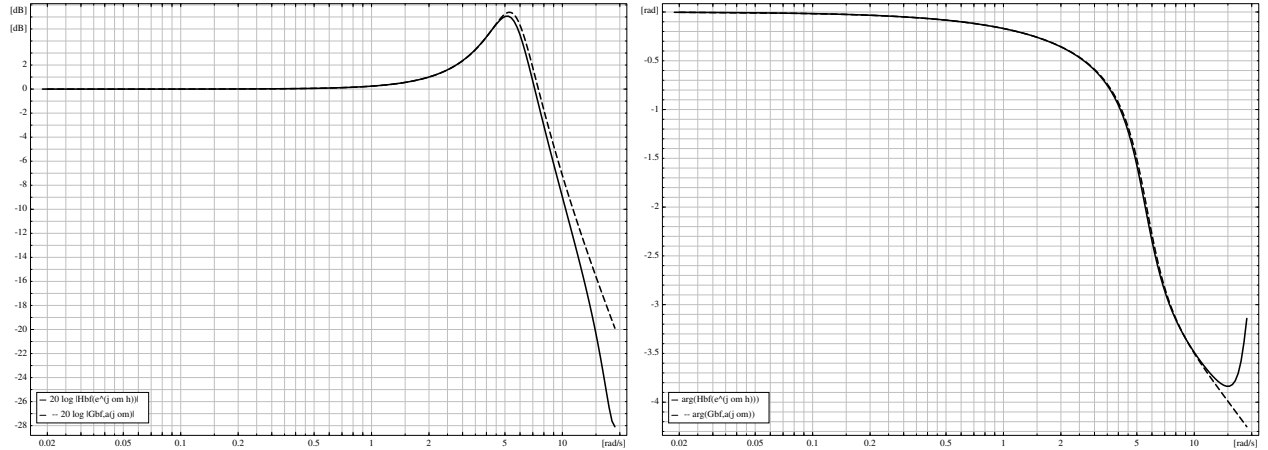


FIGURE 3 – Graphique du module en dB et de la phase. La pulsation ω est représentée en échelle logarithmique. La comparaison est entre la fonction de transfert harmonique discrète en boucle fermée $H_{\text{bf}}(e^{j\omega h})$ et la fonction de transfert harmonique analogique obtenue en tenant compte d'un retard d'une demi-période d'échantillonnage. La résonance est bien prédite, il n'y a pas de distortion de la pulsation. La phase est bien prédite mais elle est toujours monotone.

3.6 Adaptation de certaines constantes par mesure directe sur la manipulation en boucle fermée

Les composants électroniques ont des tolérances diverses, la période d'échantillonnage n'est pas forcée par des interruptions, les amplificateurs opérationnels peuvent saturer durant le transitoire. Ainsi, il y a plusieurs sources d'erreur entre le modèle théorique et la réalisation pratique.

Par l'entremise de l'oscilloscope, il est possible de mesurer la période d'échantillonnage, simplement en comptant le nombre de marches d'escaliers sur un laps de temps donné. On obtient (cf. Figure 4)

$$h = \frac{2}{13} = 0.1538[s]$$

en comptant approximativement 13 marches durant 2 secondes. (Attention la période de la consigne est plus grande que 4 secondes, cf. Figure 4)

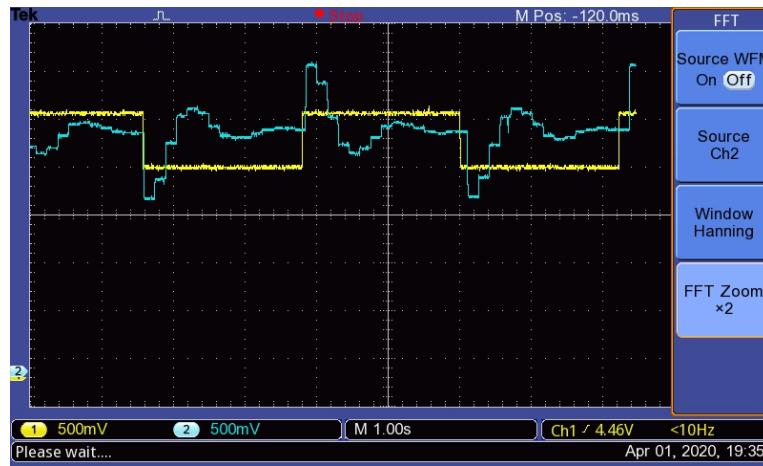


FIGURE 4 – Signal de commande en boucle fermée permettant de compter les "marches d'escalier" et d'évaluer la durée associée ce qui donne la période d'échantillonnage réelle.

En ce qui concerne le gain statique γ et la constante de temps du système analogique, on procède sans régulateur et avec deux essais en boucle ouverte.

Tous les deux comportent un signal carré qui alterne entre deux valeurs. Pour mesurer γ on estime la pente de la sortie du système analogique (Figure 5). On confirme la valeur de $\gamma = 30$, valeur obtenue à partir des valeurs des composants dans la manip 5. On mesure la pente du signal bleu et on divise la pente par la différence entre la valeur maximum du signal carré jaune et la moyenne du signal carré jaune.

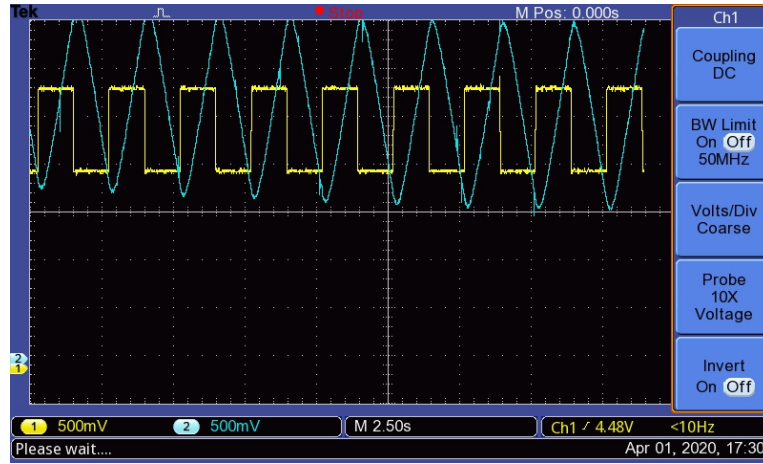


FIGURE 5 – Sortie du système analogique à commander en boucle ouverte. L'entrée est stimulée par un signal carré (fréquence basse). La pente du signal de sortie, obtenu après le transitoire, permet de déterminer le gain γ .

En ce qui concerne la constante de temps, on mesure la sortie juste avant l'intégrateur. S'il s'agissait d'un moteur électrique réel, on mesure la vitesse de celui-ci. La constante de temps est lisible sur la réponse ainsi obtenue. (Figure 6)

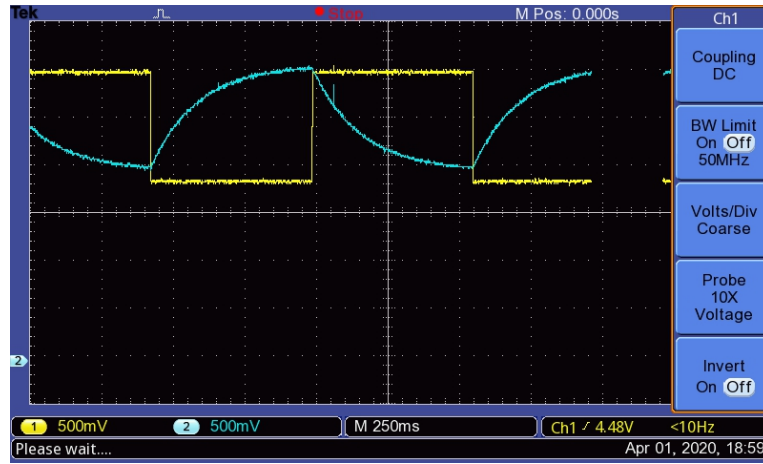


FIGURE 6 – Sortie du système du premier ordre avant l'intégrateur. La constante de temps est alors lisible.

Le modèle obtenu par la valeur des composants est confirmé, la constante de temps valant approximativement $\tau = 0.15$. Ainsi la partie du premier ordre associé au modèle est

$$\frac{6.68}{s + 6.68}$$

Finalement, en ajoutant la partie intégrateur et le gain $\gamma = 30$, on confirme bien le modèle du système à régler obtenu à partir des valeurs des composants électroniques

$$G(s) = \frac{30}{s(s + 6.68)}$$

4 Partie pratique

Faisons un tableau récapitulatif des fonctions de transfert essentielles.

quantité	valeur théorique	valeur pratique	commande sysquake
h	$1/6$	$2/13$	<code>h = 2/13;</code>
$G(s)$	$\frac{18}{s(s+6)}$	$\frac{30}{s(s+6.68)}$	<code>num = 30;</code> <code>den = [1 6.68 0];</code>
K	2	1.2	<code>K = 1.2;</code>
$H(z)$	$\frac{0.13895z+0.1321}{z^2-1.3679z+0.3679}$	$\frac{0.25919z+0.1845}{z^2-1.3578z+0.3578}$	<code>(numdo,dendo) =</code> <code>c2dm(num,den,h);</code>
$H_{bf}(z)$	$\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}$	$\frac{0.31103z+0.2214}{z^2-1.04068z+0.57923}$	<code>numd = K*numdo;</code> <code>dend = dendo;</code> <code>dend(2:end) =</code> <code>dend(2:end)+numd;</code>
$H'_{bf}(w)$	$\frac{-0.0394w^2-2.409w+34.58}{w^2+3.355w+34.58}$	$\frac{-0.034w^2-2.192w+34.26}{w^2+4.166w+34.26}$	<code>(numw,denw) =</code> <code>d2cm(numd,dend,h);</code>

On enclenche le dispositif et on lui applique une consigne sous forme de signal carré, exactement comme pour la manipulation 5.

Sur l'écran de l'oscilloscope, on aperçoit le signal de sortie qui est un signal continu et qui passe par les points de la réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée numérique calculée dans la partie théorique de la manipulation 5. Ce signal oscille durant la phase transitoire et ensuite parvient sans erreur en régime asymptotique au niveau de consigne du signal carré de l'entrée. On retrouve le résultat de la manipulation 5 (cf. Figure 7).

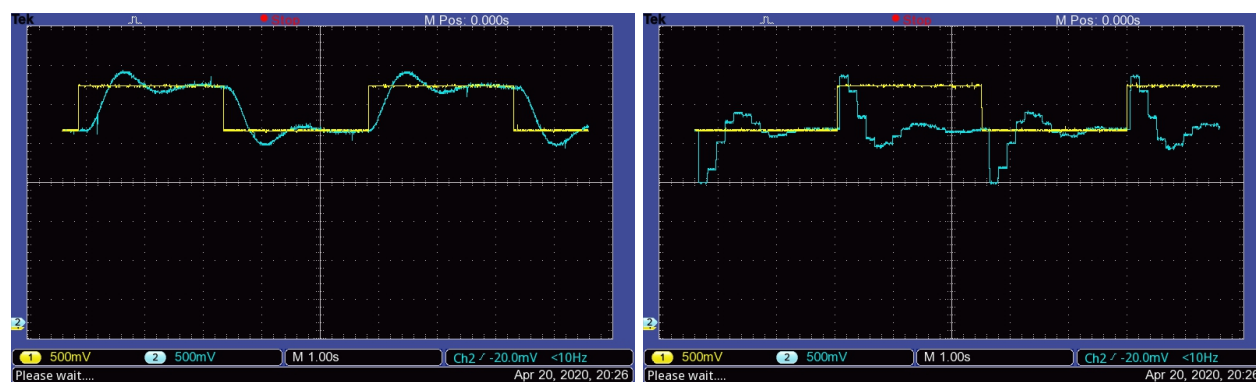


FIGURE 7 – Réponses indicielles du système en boucle fermée obtenu lors de la manip 5 (gauche) et grandeur de commande en boucle fermée (droite).

Pour la manipulation 6, on change de type de consigne et on enclenche le bouton du générateur de tension qui produit un signal sinusoidal (au lieu du signal carré). On peut ajuster la composante continue (valeur moyenne du sinus, appelé aussi offset), ainsi que la fréquence (bouton principal) et l'amplitude (bouton secondaire).

On commence avec une fréquence basse. Le signal de sortie est légèrement en retard (déphasage) sur le signal sinusoidal d'entrée. Le signal de sortie est parfaitement sinusoidal et d'amplitude quasi-

identique à l'amplitude du signal d'entrée (qui est la consigne du système en boucle fermée). On ajuste le bouton d'offset pour que le décalage dû au déphasage soit identique lors des phases ascendantes et descendantes des sinus (qui sont presque identiques car la fréquence est basse) Le résultat est représenté à la figure 8.

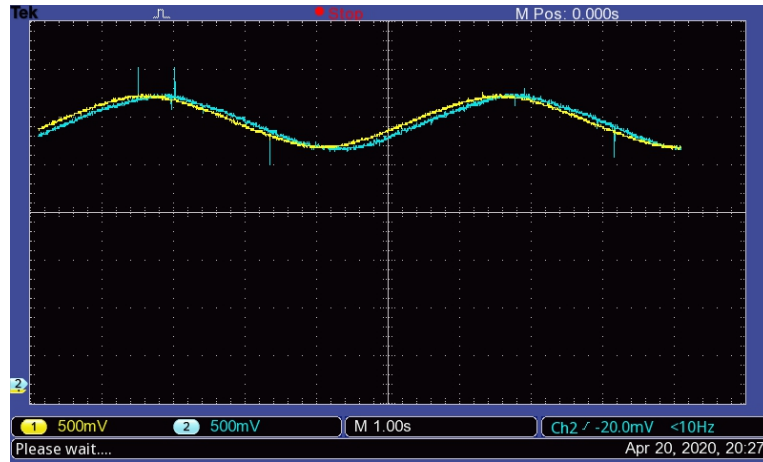


FIGURE 8 – Consigne sous forme sinusoïdale (jaune) et sortie du système à régler en boucle fermée (bleu). Le régulateur est numérique mais le signal de sortie est analogique.

4.1 Détermination de la résonance

Graduellement la fréquence du signal d'entrée est augmentée en attendant, à chaque changement de la fréquence, que le transitoire s'estompe. Lorsque l'amplitude atteint un maximum, on note la fréquence associée, c'est la fréquence de résonance (cf. Figure 9).

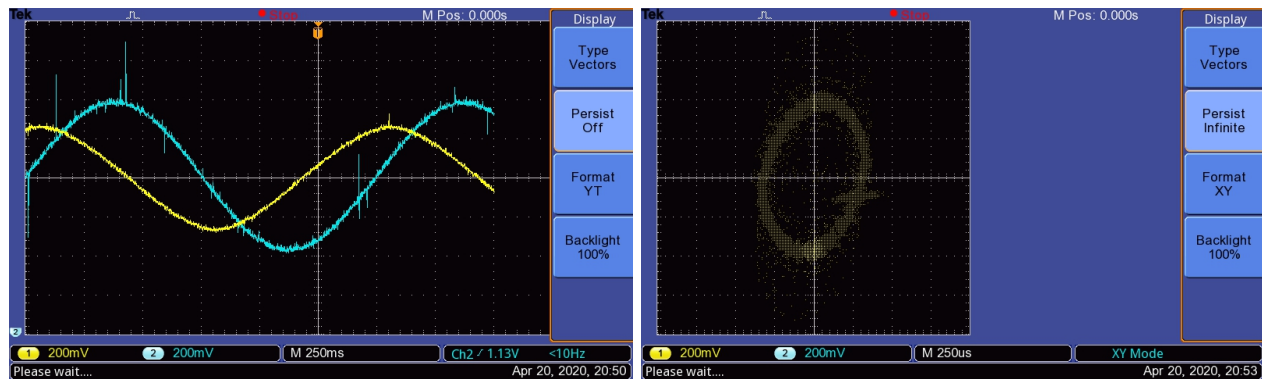


FIGURE 9 – A la résonance, l'amplitude du signal bleu (sortie du système à régler en boucle fermée) atteint son maximum. En mode XY de l'oscilloscope, l'axe X est la consigne (signal jaune du graphique de gauche) et l'axe Y est la sortie du système à régler (signal bleu du graphique de gauche). Le rapport entre la hauteur et la largeur donne le gain à la résonance. La phase est approximativement $-\frac{\pi}{2}$. L'ellipse est parfaitement verticale pour une phase de $-\frac{\pi}{2}$.

En divisant par l'amplitude d'entrée, le module du transfert harmonique est obtenu à la fréquence d'entrée f :

$$\left| H_{bf} \left(e^{j 2\pi f t} \right) \right|$$

La fréquence $f_r = 2\pi\omega_r$, pour laquelle le rapport d'amplitude est le plus grand, est la fréquence de résonance. Elle correspond donc au maximum de l'ordonnée du diagramme de Bode d'amplitude de la fonction de transfert harmonique $H(e^{j\omega h})$, où h est la période d'échantillonnage.

$$\omega_r = \arg \max_{\omega} |H_{bf}(e^{j\omega h})|$$

On obtient approximativement $\omega_r = 5$ [rad/s] ce qui donne $f_r = 0.7958$ [Hz].

En ce qui concerne le gain, on lit approximativement 4 dB sur le diagramme de Bode (cf. Figure 12) et cela correspond à un gain de $10^{4/20} = 1.58$. On constate un gain d'environ 1.44 en examinant le rapport des excursions maximales du signal bleu sur le signal jaune à la figure 9, pour une période de 1.5 [s], ce qui donne 0.66 [Hz]. Le générateur est réglé ainsi juste avant la résonance à la figure 9.

4.2 Détermination du gain à l'inversion de phase

En augmentant la fréquence au-delà de la fréquence de résonance, on obtient à un certain moment un signal de sortie (la grandeur commandée, en bleu) dont le sens est inversé par rapport au signal d'entrée (la consigne, en jaune). Le gain est inférieur à un, mais la différence de phase est exactement $-\pi$ (retard d'une demi période). Ceci est illustré à la figure 10 et le phénomène a lieu pour $f = 1.30$ [Hz] approximativement ce qui correspond à $\omega = 8.17$ [rad/s].

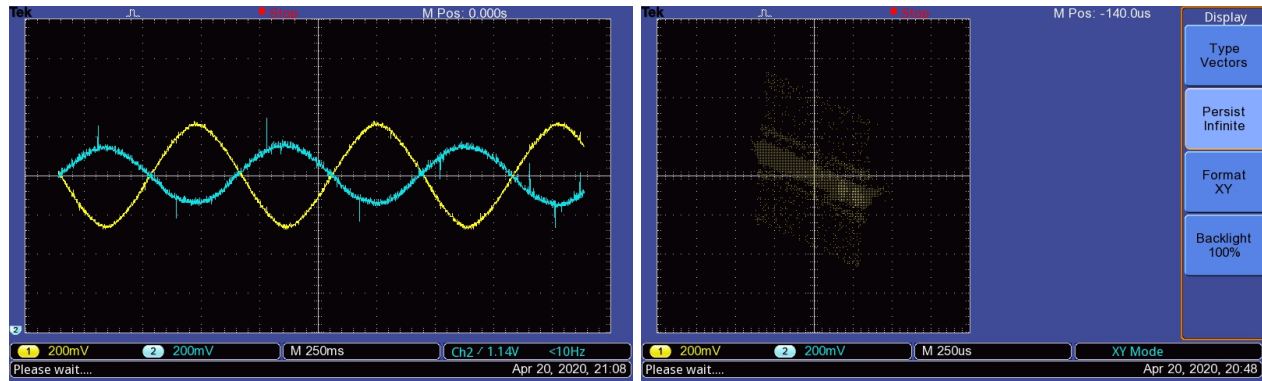


FIGURE 10 – Lorsque $f = 1.30$ [Hz] approximativement, il y a inversion de la phase et le signal bleu (sortie du système à régler en boucle fermée) est en retard exactement d'une demi-période sur le signal jaune (la consigne). En mode XY, l'ellipse dégénère en un segment de droite de pente négative. Le rapport entre l'excursion verticale sur l'excursion horizontale donne le gain à l'inversion de phase.

4.3 Retard de phase inférieur à $-\pi$

On constate également une phase en retard de plus de $-\pi$ radians lorsque la fréquence augmente. Par exemple, pour 1.82 [Hz] ce qui correspond à une pulsation de $\omega = 2\pi \cdot 1.82 = 11.44$ [rad/s] on observe ce qui est représenté à la figure 11

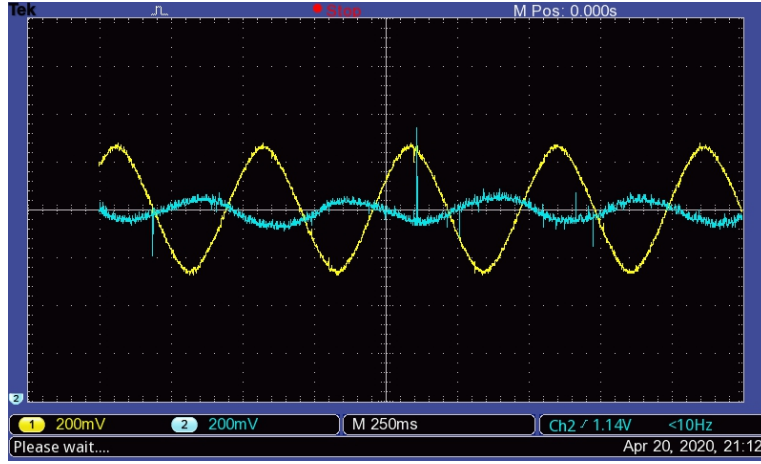


FIGURE 11 – La présence d’une phase inférieure à $-\pi$ témoigne de la présence d’une commande numérique pour un système en boucle ouvert du type $a/(s(s+b))$ bouclé avec un gain K constant.

4.4 Diagrammes de Bode obtenus à partir de valeurs des composants

La fonction de transfert harmonique correspondant aux valeurs pratiques (obtenus à partir des valeurs des composants) est représentée à la figure 12.

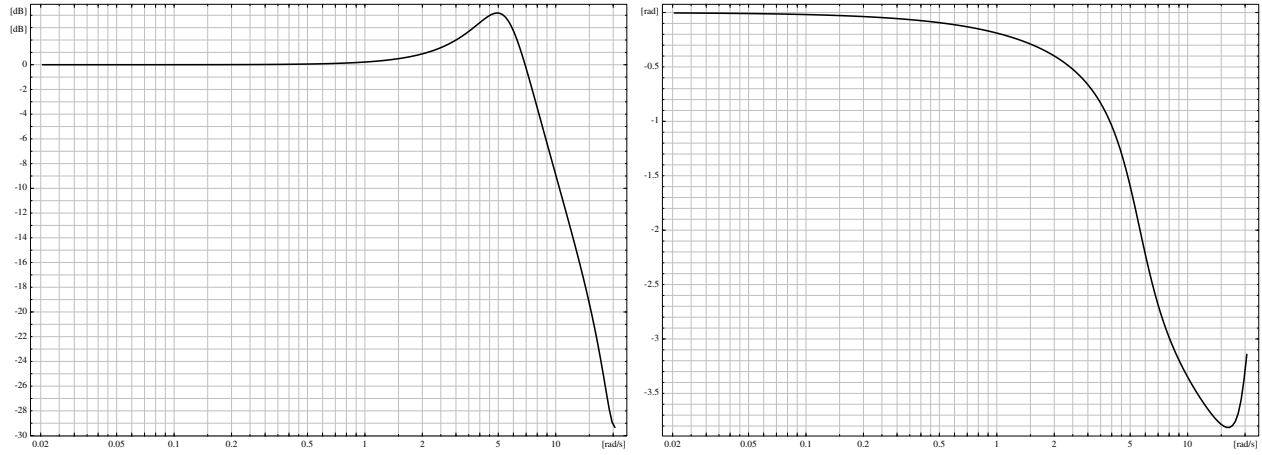


FIGURE 12 – Représentation de la fonction de transfert harmonique discrète $H_{bf}(e^{j\omega h})$ obtenue à partir de la valeur des composants avec, à gauche, le module et, à droite, la phase.

La valeur de la résonance, la fréquence de résonance, la pulsation pour à l’inversion de phase et la phase pour un gain unité peuvent tous être obtenus par lecture du diagramme.

On confirme un pulsation de résonance autour des 5 [rad/s] avec un gain de 4 [dB], ce qui donne $10^{4/20} \approx 1.58$. La pulsation d’inversion de phase est approximativement 8.2 [rad/s] et la phase pour un gain unité (0 [dB]) pour une pulsation supérieure à la pulsation de résonance est approximativement 7 [rad/s]. Ces valeurs sont en adéquation avec les mesures prises en utilisant l’oscilloscope (cf. la vidéo).