

17 mars 2025

Expérience : 5. Fonction de transfert du système bouclé

Exercice en classe 5.5.15

1 Matériel

- 1 × générateur de fonction
- 1 × oscilloscope
- 1 × Arduino Uno/Genuino
- 1 × Olimexino 85
- 1 × ordinateur avec Processing
- 1 × câble USB qui fait office de ligne série de transmission
- résistances : 1k, 2 × 6.8k, 2 × 100k, 2 × 220k,
- 1 × condensateurs : 22 μ F, 220 μ F, 6.8nF.
- 1 × TL084 (i.e. 4 ampli. op.)

2 Objectif

Il s'agit de calculer la fonction de transfert discrète en boucle fermée en asservissement d'un système analogique de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{18}{s(s+6)}$$

qui est discrétisée par des convertisseurs A/D et D/A et bouclée par un régulateur proportionnel de gain de 2. La période d'échantillonnage de la discrétisation est $h = \frac{1}{6}$ [s].

Une expérience illustre la réalisation analogique par un montage avec deux amplificateurs opérationnels. Le régulateur proportionnel et la discrétisation sont réalisés par un Olimexino 85.

3 Partie théorique

La décomposition en éléments simples conduit à

$$\begin{aligned} \frac{G(s)}{s} &= \frac{18}{s^2(s+6)} \\ &= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma}{s+6} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+6} \end{aligned} \tag{1}$$

étant donné

$$\begin{aligned} \beta &= \left. \frac{18s^2}{s^2(s+6)} \right|_{s=0} = \frac{18}{6} = 3 \\ \gamma &= \left. \frac{18(s+6)}{s^2(s+6)} \right|_{s=-6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En développant et en égalant les numérateurs

$$18 = \alpha s(s+6) + \beta(s+6) + \gamma s^2$$

et comme le coefficient devant s^2 est nul, on a

$$\alpha = -\gamma = -\frac{1}{2}$$

On prend la transformée de Laplace inverse de (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = -\frac{1}{2}\epsilon(t) + 3t + \frac{1}{2}e^{-6t}$$

qui devient en échantillonnant avec $t = kh$

$$-\frac{1}{2}\{\epsilon(kh)\} + 3\{kh\} + \frac{1}{2}\{e^{-6kh}\}$$

conduisant à

$$\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right] = -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + 3\frac{hz}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-6h}}$$

et donc

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z-1}{z} \left(-\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + 3\frac{hz}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-6h}} \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(z-1)(z-e^{-6h}) + 3h(z-e^{-6h}) + \frac{1}{2}(z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-6h})} \\ &= -\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6h} + 3h - 1 \right) z - \frac{1}{2}e^{-6h} - 3he^{-6h} + \frac{1}{2}z^2 - (1+e^{-6h})z + e^{-6h} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 \right) z - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}}{z^2 - (1+e^{-1})z + e^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{-1} \cdot z - e^{-1} + \frac{1}{2}}{z^2 - (1+e^{-1})z + e^{-1}} \end{aligned}$$

Ainsi avec $e^{-1} \approx 0.3679$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.18395z + 0.1321}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

et donc en boucle fermée d'asservissement

$$\begin{aligned} H_{bf} &= \frac{2H(z)}{1 + 2H(z)} = \frac{2(0.18395z + 0.1321)}{z^2 - 1.3679z + 0.3679 + 2(0.18395z + 0.1321)} \\ &= \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321} \end{aligned}$$

La réponse indicielle est représentée à la figure 1.

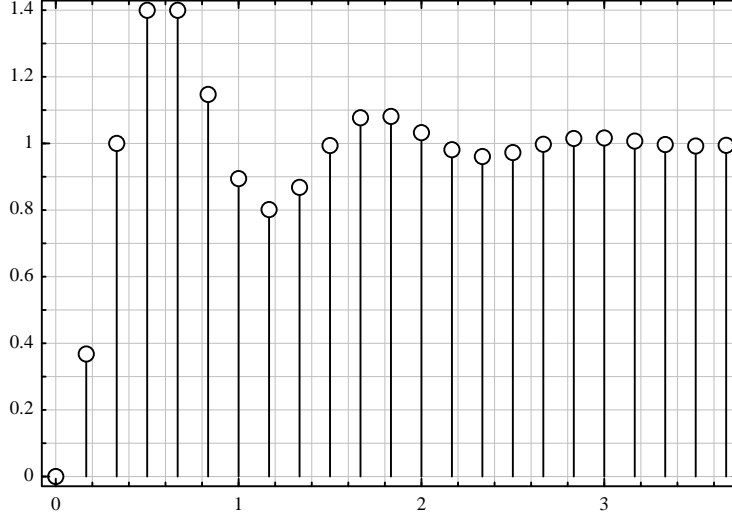


FIGURE 1 – Réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf} = \frac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}$.

4 Expérience associée

4.1 Partie analogique électronique

L'Arduino combiné avec Processing sont utilisés comme oscilloscope. Le setup de l'expérience 3, avec $C = 6.8[\text{nF}]$ et $R = 220[\text{k}\Omega]$ qui constitue un filtre RC de lissage du MLI est modifié pour donner le setup de la figure 2.

Un suiveur de tension est monté à la sortie de celui-ci afin que la partie analogique n'interfère pas avec ce filtre.

Un second amplificateur opérationnel réalise la fonction de transfert d'un premier ordre

$$G_1(s) = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_2Cs + 1}$$

Avec les valeurs $R_1 = R_2 = 6.8 [\text{k}\Omega]$ et $C = 22[\mu\text{F}]$ cela conduit à

$$G_1(s) = -\frac{1}{0.1496s + 1} = -\frac{6.68}{s + 6.68}$$

Un montage en intégrateur de Miller utilise un troisième amplificateur opérationnel dont la fonction de transfert

$$G_2(s) = -\frac{1}{R_3C_2s}$$

Remarque : Mathématiquement beaucoup de valeurs des composants R_3 et C_2 donnent le gain de 18. Toutefois, les condensateurs ont une résistance interne qui fausse le produit R_3C_2 et son assignation devient difficile si C_2 est trop petit. On opte pour les valeurs $C_2 = 220\mu\text{F}$ avec une résistante de $R_3 = 1 [\text{k}\Omega]$. Ceci donne le gain de 4.55 et la fonction de transfert

$$G_2(s) = -\frac{4.55}{s}$$

La fonction de transfert de la partie électronique analogique devient ainsi

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s) = -\frac{6.68}{s + 6.68} \left(-\frac{4.55}{s} \right) \\ &= \frac{30}{s(s + 6.68)} \end{aligned}$$

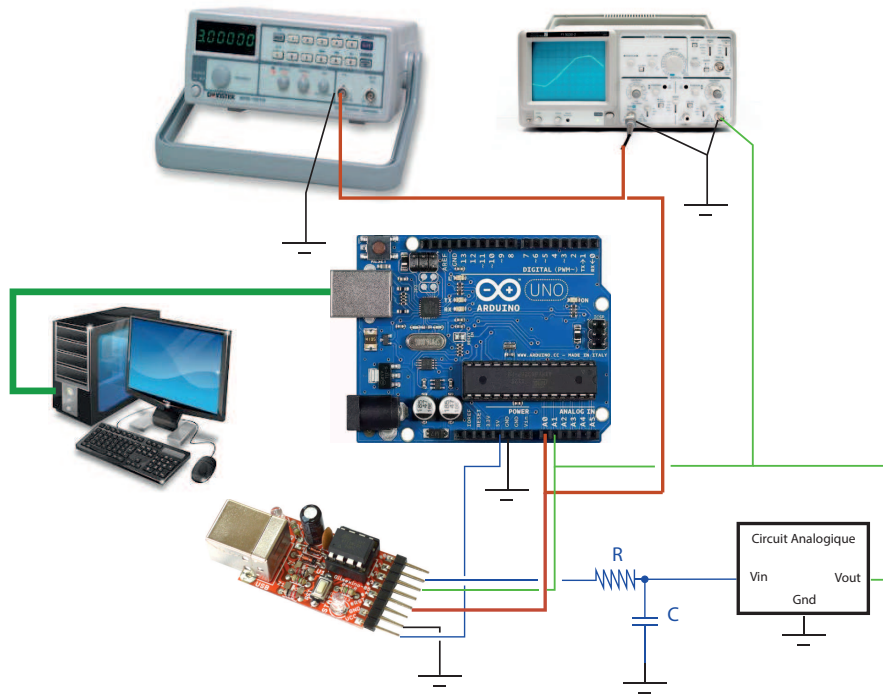


FIGURE 2 – Schéma de l'interconnexion des éléments. L'Arduino sert à visualiser les signaux. Le régulateur proportionnel est implémenté sur l'Olimexino. Ce dernier reçoit sur son entrée #2 (broche 3) le signal à commander et sur l'entrée #4 (broche 5) la consigne provenant du générateur de fonction. La sortie du MLI est #1 (broche 2) qui va sur le filtre RC de lissage avant d'attaquer le suiveur de tension du circuit analogique.

Pour avoir des résultats similaires à ceux obtenus à la partie théorique, il faut ajuster le gain du régulateur de la façon suivante. Le gain à basse fréquence est $2 \times 18 = 36$ et il faudra ainsi remplacer le gain de 2 par

$$\frac{36}{30} = 1.2$$

Le schéma électronique est donné à la figure 3 et la montage sur la plaque d'expérimentation est donné à la figure 4

4.2 Code de l'Olimexino 85

Le code de l'Olimexino réalise le gain proportionnel et s'occupe de lire la consigne et la grandeur de commande. La sortie du régulateur proportionnel est écrite sur la sortie analogique.

```
int yk = 0; // y(k)
int yck = 0;
int ek = 0;

// Mise en place
void setup() {
```

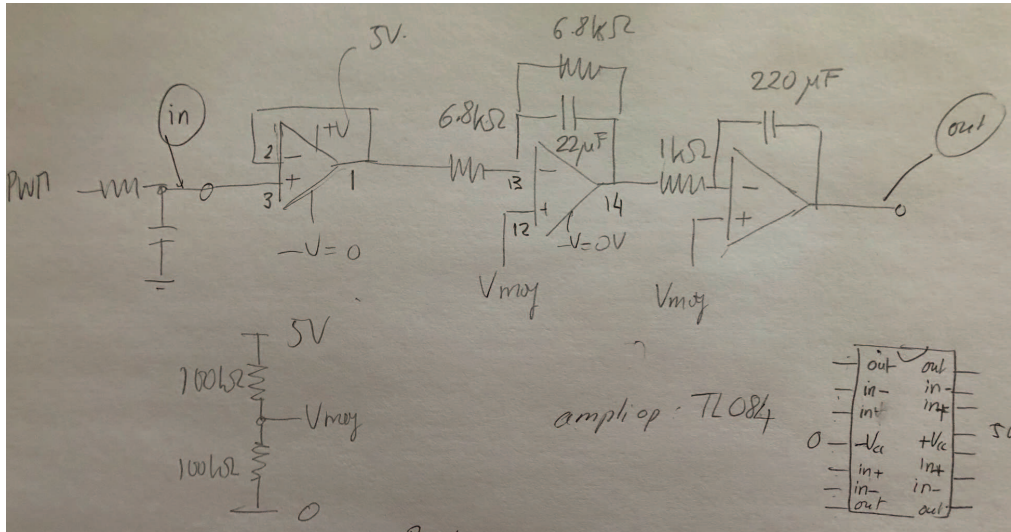


FIGURE 3 – Schéma du système analogique électronique qui réalise $G(s) = \frac{30}{s(s+6.68)}$.

```
pinMode(1, OUTPUT);    // broche 1 comme sortie

TCCR0A = 2<<COM0A0 | 2<<COM0B0 | 3<<WGM00;
TCCR0B = 0<<WGM02 | 1<<CS00;
TCCR1 = 0<<PWM1A | 0<<COM1A0 | 1<<CS10;
GTCCR = 1<<PWM1B | 2<<COM1B0;

analogWrite(1, LOW);
}

void loop() {
  yk = analogRead(1);    // lecture de la broche 2 entre 0..1023
  yck = analogRead(2);
  ek = yck-yk;
  analogWrite(1, 1.2*ek/3.23+125);    // PWM entre 0 et 250 -> 3.23 conv.
  // le gain est 1.2
  delay(10000); // delai pour implementer la periode d'echantillonnage 0.16 [s]
}
```

5 Résultats expérimentaux

Les résultats sont donnés aux figures 5 et 6.

On obtient une sortie analogique (graphique du haut à la figure 5 et 6) dont les échantillons après discrétisation sont en adéquation avec la réponse indicielle théorique de la figure 1.

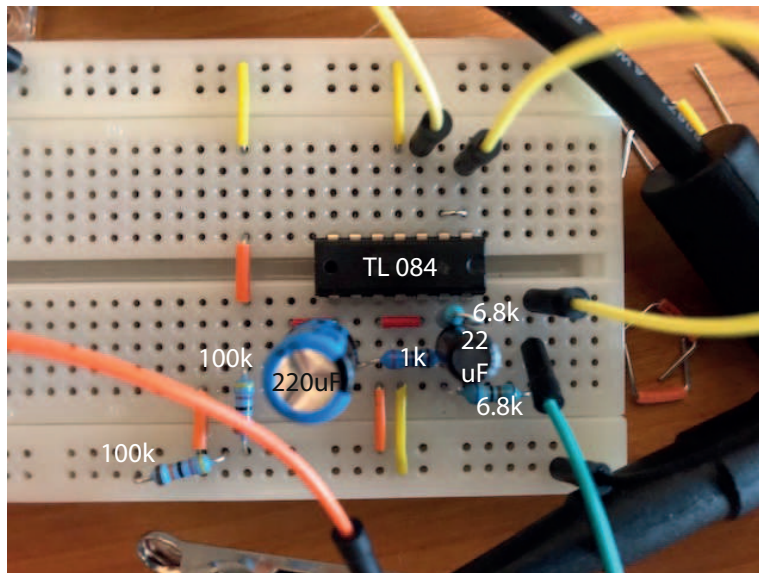


FIGURE 4 – Composants discrets R_1 , R_2 , R_3 , C_1 et C_2 ainsi que le TL084 montés sur la plaque d'expérimentation qui réalise la partie analogique de l'exercice.

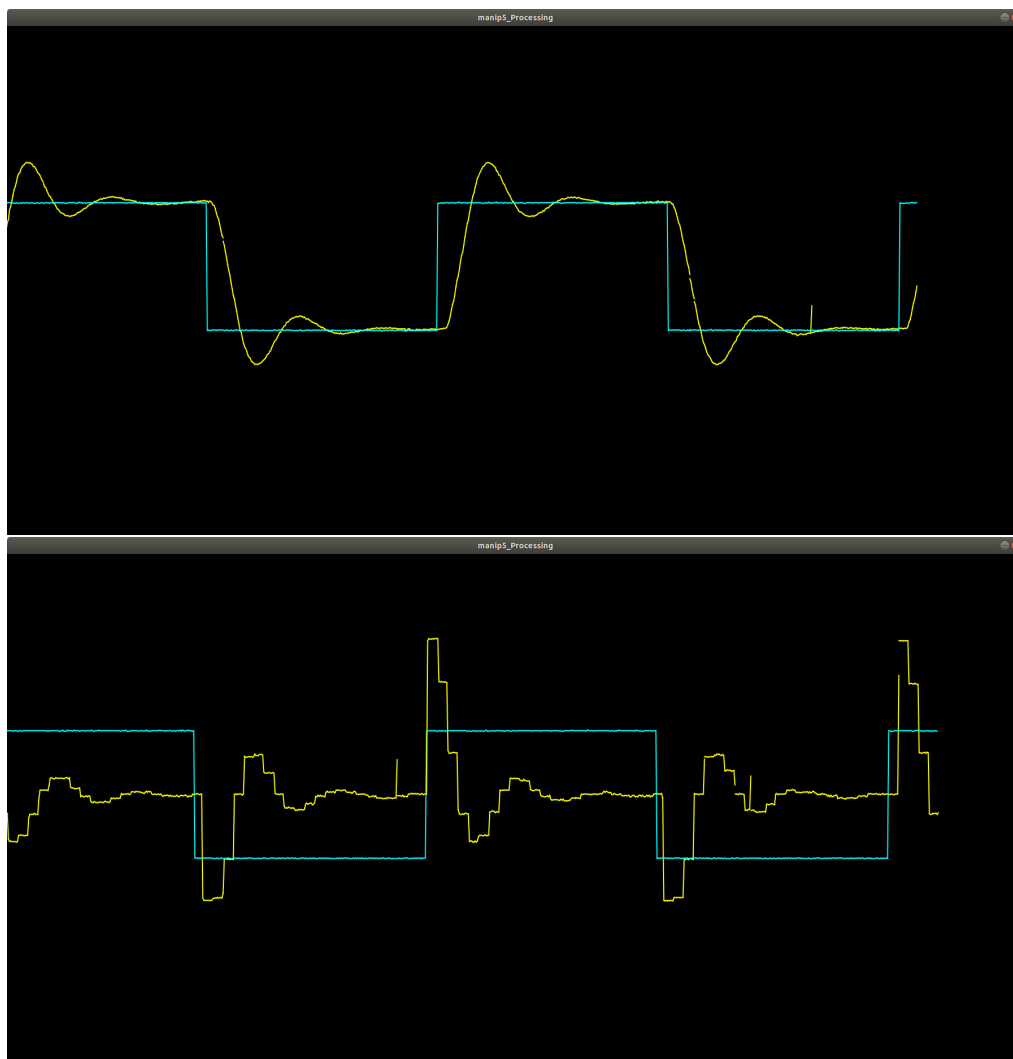


FIGURE 5 – En haut, la grandeur commandée $y(t)$ du système analogique, commandé en boucle fermée. En bas, la grandeur de commande $u(t)$ analogique issue de la séquence $u(k)$ discrète après un maintien d'ordre zéro. Ceci donne les "marches d'escaliers" caractéristiques. Dans les deux cas, la consigne $y_c(t)$ analogique avant sa discrétisation par l'Olimexino est représentée en bleu clair.

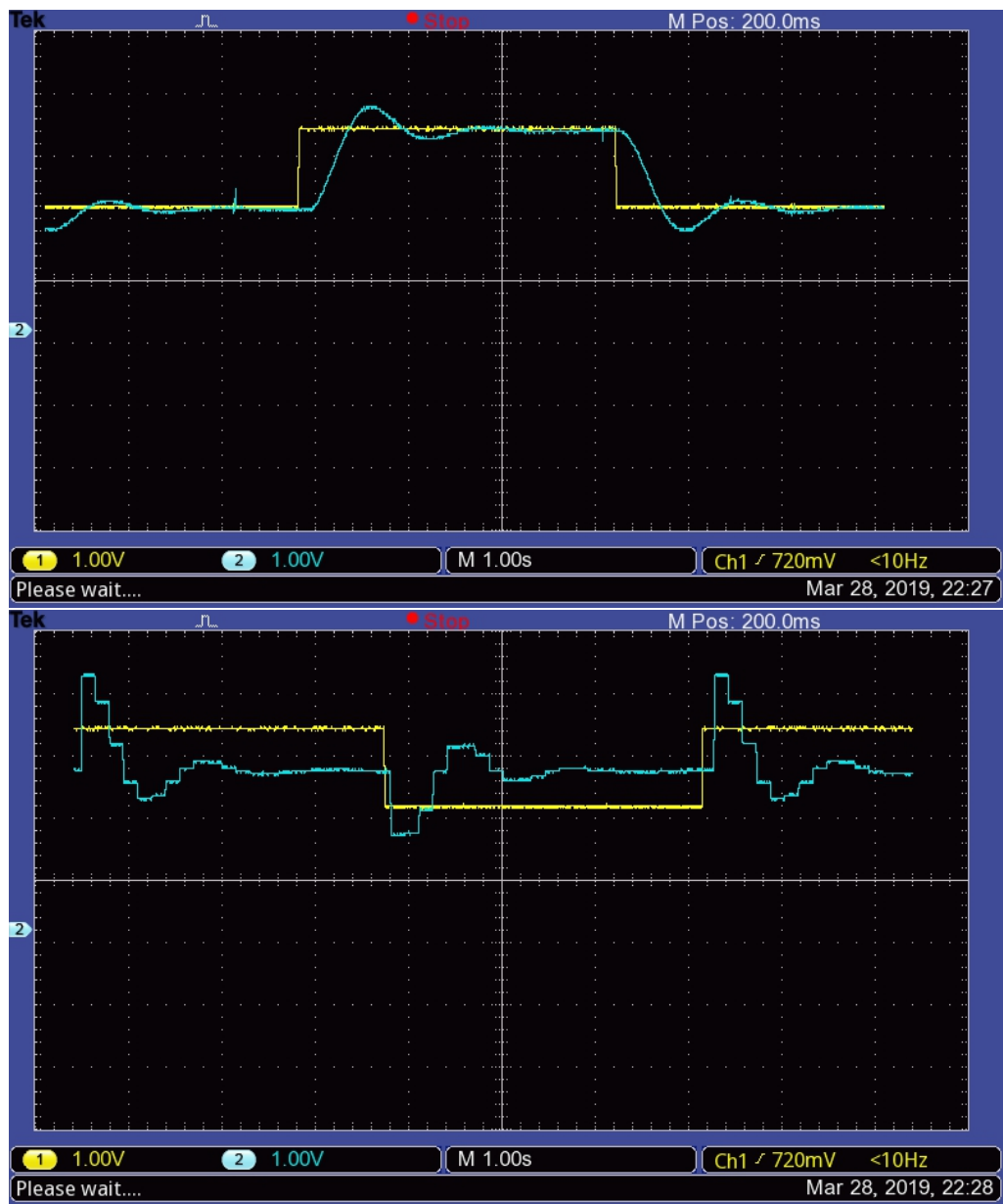


FIGURE 6 – Avec l’oscilloscope, l’échelle temporelle ainsi que les valeurs d’amplitude sont plus explicites. Remarque, les couleurs sont inversées par rapport à la figure 5.